

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ КРАСНОЯРСКОГО КРАЯ
КРАЕВОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«КРАСНОЯРСКИЙ КОЛЛЕДЖ ОТРАСЛЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И
ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА»

РАССМОТРЕНО

методической комиссией
протокол № 10 от 19.06.2026 г.

УТВЕРЖДЕНО

Директор КГАПОУ «ККОТиП»
_____/Н. В. Журова/
Приказ №_01-55-1п от 29.06.2026 г.

ПРОГРАММА ПОДГОТОВКИ
КВАЛИФИЦИРОВАННЫХ РАБОЧИХ, СЛУЖАЩИХ

23.01.17 МАСТЕР ПО РЕМОНТУ И ОБСЛУЖИВАНИЮ АВТОМОБИЛЕЙ
на базе основного общего образования

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

ОД6.07 МАТЕМАТИКА

Зам. директора по УР

_____/И.В. Бесперстова /

Красноярск, 2026

Организация-разработчик: КГАПОУ «ККОТиП»

Разработчик:

Ковалева Ольга Николаевна, преподаватель математики КГАПОУ «ККОТиП»

СОДЕРЖАНИЕ

1. Пояснительная записка
2. Перечень практических работ
3. Инструктивно-методические рекомендации по выполнению практических работ

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания к проведению практических занятий по учебной дисциплине ОДб.07 Математика, предназначены для обучающихся СПО по профессии 23.01.17 Мастер по ремонту и обслуживанию автомобилей

Практические занятия/лабораторные работы проводятся с целью усвоения и закрепления практических умений и знаний, овладения профессиональными компетенциями. В ходе практических занятий/лабораторных работ студенты приобретают практические умения, предусмотренные рабочей программой учебной дисциплины ОДб.07 Математика, учатся самостоятельно работать с оборудованием, проводить эксперименты, анализировать полученные результаты и делать выводы, подтверждать теоретические положения лабораторным экспериментом.

При выполнении практических занятий/лабораторных работ по учебной дисциплине ОДб.07 Математика планируется достижение следующих целей:

Знание

- сформированность представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, идеях и методах математики
- понимание значимости математики для научно-технического прогресса, сформированность отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования
- овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественнонаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности
- готовность и способность к самостоятельной творческой и ответственной деятельности
- готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности
- отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем
- сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке
- сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий
- владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач
- владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств
- сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей
- владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием

- сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин
- владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач

Умение

- умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях
- умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты
- владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания
- готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников
- владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства
- владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения
- целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира

Вышеперечисленные умения и знания направлены на формирование у студентов следующих общих и профессиональных компетенций: ОК 01, ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 06, ОК 07, ПК 3.5

2. ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практические работы выполняются обучающимися по графику, составленному в соответствии с учебным планом по 23.01.17 Мастер по ремонту и обслуживанию автомобилей и рабочей программой учебной дисциплины ОДб.07 Математика.

Задача практических занятий – закрепить теоретические знания обучающихся и отработать практические навыки и умения в соответствии с планируемыми результатами обучения.

Согласно учебного плана по специальности и программы учебной дисциплины ОДб.07 Математика на практические занятия обучающихся отведено 110 академических часов.

Наименование раздела, номер и тема практического занятия	Количество часов
Раздел 1. Повторение курса математики основной школы	
Геометрия на плоскости	2*
Входной контроль	2
Раздел 2. Прямые и плоскости в пространстве	
Решение задач. Прямые и плоскости в пространстве	2
Параллельные, перпендикулярные, скрещивающиеся прямые	4*
Раздел 3. Координаты и векторы	
Решение задач. Координаты и векторы	2
Практикоориентированные задачи на координатной плоскости	4*
Раздел 4. Основы тригонометрии. Тригонометрические функции	
Решение задач. Основы тригонометрии. Тригонометрические функции	2
Простейшие тригонометрические неравенства	4
Использование свойств тригонометрических функций в профессиональных задачах	4*
Раздел 5. Комплексные числа	
Применение комплексных чисел	2
Раздел 6. Производная функции, ее применение	
Решение задач на применение производной	2
Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах	6*
Раздел 7. Многогранники и тела вращения	
Симметрия многогранников	2
Конус и его элементы	4
Решение задач. Многогранники и тела вращения	6*
Раздел 8. Первообразная функции, ее применение	
Определенный интеграл в жизни	4*
Решение задач. Первообразная функции, ее применение	2
Раздел 9. Степени и корни. Степенная функция	
Решение иррациональных уравнений и неравенств	6
Раздел 10. Показательная функция	
Решение задач. Показательная функция	2
Решение показательных уравнений и неравенств	8
Раздел 11. Логарифмы. Логарифмическая функция	
Решение задач. Логарифмы. Логарифмическая функция	2
Решение логарифмических уравнений и неравенств	8
Логарифмы в природе и технике	4*
Раздел 12. Множества. Элементы теории графов	
Операции с множествами	2*
Применение графов к решению задач	2*

Раздел 13. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	
Составление таблиц и диаграмм на практике	4*
Решение комбинаторных задач	2
Вероятность в профессиональных задачах	4*
Раздел 14. Уравнения и неравенства	
Уравнения и неравенства с параметрами	2*
Решение уравнений и неравенств	2
Решение задач с помощью уравнений	4
Решение текстовых задач профессионального содержания	4*
ИТОГО:	110 из них 52*

3. ИНСТРУКТИВНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие № 1

Тема занятия: Геометрия на плоскости (2 часа*)

Содержание темы: отработать умения и навыки вычисления площади помещения.

Планируемые образовательные результаты: научить различать общую площадь помещения от частичной, вспомнить формулы вычисления площадей многоугольников, отработать навыки вычисления площади помещений.

Форма организации учебной деятельности: практическая работа

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка, схема квартиры, развертка стен комнаты.

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Прочитайте материал

Помещение автомастерской – это помещение, как правило, состоящее из нескольких обособленных помещений различного назначения.

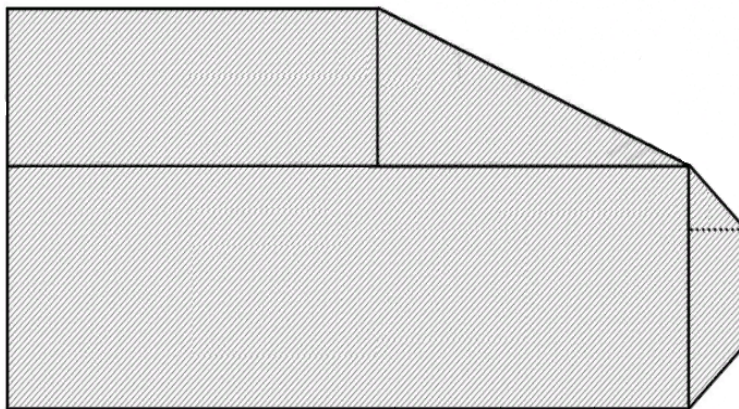
Площадь – это то, на что мы в первую очередь обращаем внимание при выборе помещения. Именно она влияет на цену, планировку и другие важные нюансы. Общая площадь – это сумма площадей всех помещений, входящих в ее состав.

Общая площадь – это сумма площадей всех комнат, составляющих данное помещение, в том числе подсобных помещений.

Общую площадь здания необходимо знать для определения:

1. Стоимости строения;
2. Объемов и характера перепланировочных или реконструкционных работ;
3. Размера доли в праве общей долевой собственности и т.д.

Если вы хотите рассчитать площадь помещения неправильной формы – вам следует разбить поверхность помещения на простые фигуры (квадрат, прямоугольник, треугольник, трапеция), воспользоваться стандартными математическими формулами и сложить полученные значения.



Задание 2. Рассчитать общую площадь автомастерской, а также площади отдельных цехов, входящих в автомастерскую, с учетом их форм.

Задание 3. Рассчитать возможность заполнения одного из цехов автомастерской соответствующим оборудованием, с учетом, выбранного вами оборудования.

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 2

Тема занятия: Входной контроль (2 часа)

Содержание темы: проверка уровня знаний и умений обучающихся за школьный курс математики

Планируемые образовательные результаты: проверить уровень усвоения материала

Формы организации учебной деятельности: практическая работа

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка, схема квартиры, развертка стен комнаты.

Задания для самостоятельного выполнения: задания выдаются по вариантам

1 вариант

1. Найдите значение выражения $\left(\frac{7}{6} + 3\frac{4}{9}\right) \cdot 4,5$

Ответ: _____

2. Какое из чисел: $\sqrt{3600}$, $\sqrt{3,6}$, $\sqrt{0,36}$ – является иррациональным?

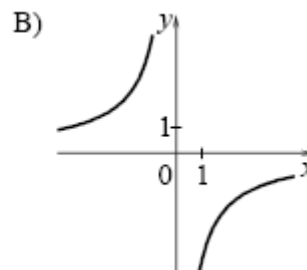
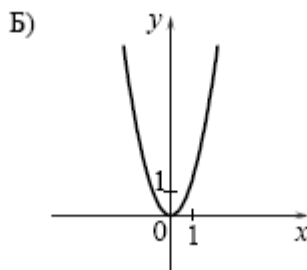
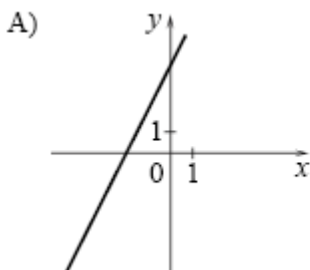
- 1) $\sqrt{3600}$ 2) $\sqrt{3,6}$ 3) $\sqrt{0,36}$ 4) ни одно из этих чисел

Ответ: _____

3. Решите уравнение: $5 - \frac{1}{2}(2x - 6) = 3(3 - x)$

Ответ: _____

4. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



- 1) $y = 2x - 4$ 2) $y = -\frac{4}{x}$ 3) $y = 2x^2$ 4) $y = 2x + 4$

А	Б	В

Ответ:

5. Арифметическая прогрессия задана первыми двумя членами: $a_1 = 8$, $a_2 = 5$. Найдите сумму первых 20 членов этой прогрессии.

Ответ: _____

6. Для каждого неравенства укажите множество его решений

- а) $x^2 - 4x > 0$ 1) $(-4; 0)$
б) $x^2 + 4x < 0$ 2) $(-4; 4)$
в) $4x^2 - 64 < 0$ 3) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$

А	Б	В

Ответ:

7. В треугольнике ABC внешние углы при вершинах B и C равны 105° и 145° соответственно. Найдите градусную меру угла A .

Ответ: _____

8. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона AB равна 20, основание AC равно 32. Найдите $\operatorname{tg} \angle A$.

Ответ: _____

9. Вектор $\overline{AB}$ с началом в точке $A(-8; -12)$ имеет координаты $(4; -14)$. Найдите ординату точки B .

Ответ: _____

10. В таблице приведены нормативы по прыжкам в длину для учащихся девятых классов. Оцените результат девочки, прыгнувшей в длину 3,85 м.

	Мальчики			Девочки		
отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Длина, см	430	380	330	370	330	290

1) отметка «5»

3) отметка «3»

2) отметка «4»

4) норматив не выполнен

Ответ: _____

11. Билет в театр стоит 500 рублей. Школьникам предоставляется скидка в размере 30% от полной стоимости билета. Сколько рублей нужно заплатить за билеты на группу, состоящую из 32 школьников и 3 учителей.

Ответ: _____

12. Записан рост (в сантиметрах) шести учащихся: 152, 158, 137, 130, 134, 147. На сколько отличается среднее арифметическое этого набора чисел от его медианы?

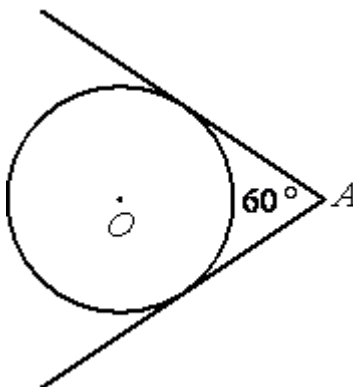
Ответ: _____

13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 2, \\ x^2 - 4x + 8 = y. \end{cases}$$

Ответ: _____

14. Из точки A проведены две касательные к окружности с центром в точке O . Найдите радиус окружности, если угол между касательными равен 60° , а расстояние от точки A до точки O равно 8.



Ответ: _____

2 вариант

1. Найдите значение выражения $\left(\frac{11}{8} - 1\frac{7}{11}\right) \cdot 2,2$

Ответ: _____

2. Какое из чисел: $\sqrt{0,625}$, $\sqrt{6,25}$, $\sqrt{6250}$ – является рациональным?

1) $\sqrt{0,625}$

2) $\sqrt{6,25}$

3) $\sqrt{6250}$

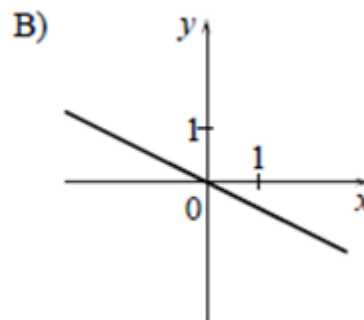
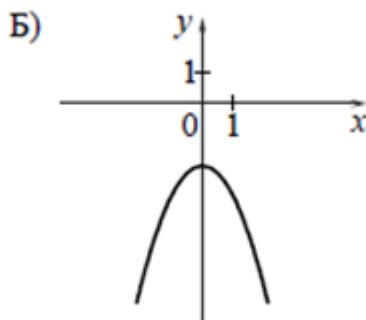
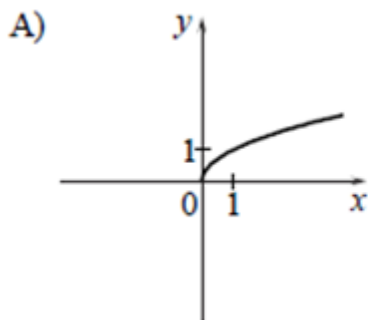
4) ни одно из этих чисел

Ответ: _____

3. Решите уравнение: $10 - 8(x - 6) = 2 - 4x$

Ответ: _____

4. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



1) $y = -\frac{1}{2}x$

2) $y = -\frac{1}{x}$

3) $y = -x^2 - 2$

4) $y = \sqrt{x}$

А	Б	В

Ответ:

5. Арифметическая прогрессия задана первыми двумя членами: $a_1 = 4$, $a_2 = 9$. Найдите сумму первых 10 членов этой прогрессии.

Ответ: _____

6. Для каждого неравенства укажите множество его решений

а) $x^2 + 9 > 0$

1) $(-3; 3)$

б) $x^2 - 9 > 0$

2) $(-\infty; \infty)$

в) $x^2 - 9 < 0$

3) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

А	Б	В

Ответ:

7. В треугольнике ABC угол A равен 46° , внешний угол при вершине B равен 115° . Найдите градусную меру угла C .

Ответ: _____

8. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 14, а $\cos \angle A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите высоту, проведенную к основанию.

Ответ: _____

9. Вектор $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(-3; 2)$ имеет координаты $(6; -15)$. Найдите абсциссу точки B .

Ответ: _____

10. В таблице приведены нормативы по бегу на дистанцию 60 метров для учащихся девятых классов. Оцените результат мальчика, пробежавшего 60 метров за 9,1 секунды.

	Мальчики			Девочки		
отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Время, сек	8,4	9,2	10,0	9,4	10,0	10,5

1) отметка «5»

3) отметка «3»

2) отметка «4»

4) норматив не выполнен

Ответ: _____

11. Билет в музей стоит 150 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 40% от полной стоимости билета. Сколько рублей нужно заплатить за билеты на группу, состоящую из 28 школьников и 2 учителей.

Ответ: _____

12. Записан рост (в сантиметрах) пяти учащихся: 158, 166, 134, 130, 132. На сколько отличается среднее арифметическое этого набора чисел от его медианы?

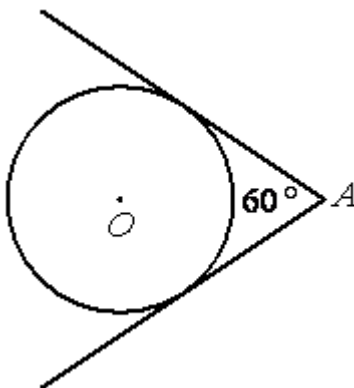
Ответ: _____

13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x^2 - 11x + 14 = 2y. \end{cases}$$

Ответ: _____

14. Из точки A проведены две касательные к окружности с центром в точке O . Найдите расстояние от точки A до точки O , если угол между касательными равен 60° , а радиус окружности равен 6.



Ответ: _____

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 3

Тема занятия: Решение задач «Прямые и плоскости в пространстве» (2 часа)

Содержание темы: обобщить и систематизировать знания по теме «Взаимное расположение прямых и плоскостей», «Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве»; закрепить умения использовать полученные знания для решения задач.

Планируемые образовательные результаты: обобщить и систематизировать знания по теме.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, линейка, карандаш

Задания для самостоятельного выполнения:

Практические задания: решить задачи в тетради с полным оформлением, заполнить таблицу

ответов:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

1. Из данной точки до плоскости проведены перпендикуляр и наклонная. Длина перпендикуляра равна длине проекции наклонной. Найдите угол между перпендикуляром и наклонной

- а) 60° ;
- б) 30° ;
- в) 45° ;
- г) 90° .

2. Прямая a перпендикулярна к плоскости α и пересекает её в точке O . Точка K лежит на данной прямой и удалена от плоскости α на 32 см, а от точки N , лежащей на этой плоскости – на 40 см. Найдите NO .

- а) 24 см;
- б) 44 см;
- в) 28 см;
- г) 34 см.

3. С некоторой точки до данной плоскости проведён перпендикуляр, который равен h , и наклонная, угол между ними равен 45° . Найдите длину наклонной.

- а) $2h$;
- б) $h\sqrt{3}$;
- в) h ;
- г) $h\sqrt{2}$.

4. Величина двугранного угла равна 60° . На его ребре находятся точки A и B , расстояние между которыми 24 см, а на гранях точки C и D такие, что $AC = BC = 13$ см, $AD = BD = 15$ см. Найдите расстояние между точками C и D .

- а) $\sqrt{63}$ см;
- б) $\sqrt{59}$ см;
- в) $\sqrt{61}$ см;
- г) $\sqrt{51}$ см.

5. В равностороннем треугольнике ABC , $AB = 2$ см, $AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, $CA_1 = 3$ см, $CB_1 = 7$ см, $A_1D = DB_1$. Найдите CD .

- а) $\sqrt{25}$;
- б) $\sqrt{19}$;
- в) $\sqrt{23}$;
- г) $\sqrt{21}$.

6. Через точку O пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ проведён перпендикуляр MO к плоскости квадрата, сторона квадрата равна $2a$. Найдите расстояние между прямыми AB и MO .

- а) a ;
- б) $2a$;
- в) $\frac{1}{2}a$;
- г) $3a$.

7. С точки A на плоскость P проведены наклонные $AB = 20$ см и $AC = 43$ см. Зная, что проекции этих наклонных на плоскость относятся как 2:5, найти расстояние от точки A до плоскости P .

- а) 11 см;
- б) 10 см;
- в) 18 см;
- г) 16 см.

8. Разность длин двух наклонных, опущенных с данной точки M до плоскости, равна 6 см, а их проекции на эту плоскость соответственно равны 27 см и 15 см. Найдите расстояние от

точки М до плоскости.

- а) 26 см;
- б) 36 см;
- в) 34 см;
- г) 38 см.

9. Точка удалена от всех вершин прямоугольного треугольника на 6,5 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости треугольника, если его катеты равны 3 см и 4 см.

- а) 3 см;
- б) 10 см;
- в) 6 см;
- г) 8 см.

10. Данный отрезок касается концами две взаимно перпендикулярные плоскости и образует с одной из них угол 45° , а с другой – угол 30° . Длина этого отрезка равна а. Определите часть линии пересечения плоскости, которая находится между перпендикулярами, опущенными на неё из концов данного отрезка.

- а) 2а;
- б) $\frac{1}{3}a$;
- в) а;
- г) $\frac{1}{2}a$.

11. Между двумя параллельными плоскостями Р и Q проведены отрезки АС и ВD (точки А и В лежат в плоскости Р), АС = 13, ВD = 15 см, сумма длин проекций АС и ВD на одну из данных плоскостей равна 14 см. Найдите длину этих проекций и расстояние между данными плоскостями.

- а) 12 см;
- б) 11 см;
- в) 14 см;
- г) 10 см.

12. Через одну из сторон ромба проведена плоскость на расстоянии 4 см от противоположной стороны. Проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны 8 см и 2 см. Найдите проекции сторон ромба на эту плоскость.

- а) 4 см, 3 см;
- б) 5 см, 4 см;
- в) 5 см, 3 см;
- г) 6 см, 2 см.

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 4

Тема занятия: Взаимное расположение прямых в пространстве (Параллельные, перпендикулярные, скрещивающиеся прямые) (4* часа)

Содержание темы: обобщить и систематизировать знания по теме «Взаимное расположение прямых в пространстве», «Перпендикуляр и наклонная», закрепить умения использовать полученные знания для решения задач.

Планируемые образовательные результаты: обобщить и систематизировать знания по теме.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, линейка, карандаш

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Решение задач на взаимное расположение прямых и плоскостей

Теоретические сведения к практической работе:

Теорема

Две прямые называются скрещивающимися, если одна из них лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке не принадлежащей 1 прямой.

Определение.

2 прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Определение.

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются

Определение.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Теорема

Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Теорема

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны

Задание для самостоятельного решения:

Вариант 1.

1) Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону AC. Точка P – середина стороны AD, точка K – середина DC.

а) Каково взаимное расположение прямых PK и AB?

б) Чему равен угол между прямыми PK и AB, если угол ABC равен 40° , а угол BCA = 80° .

Ответ обобщите.

2) Прямые a и b лежат в параллельных плоскостях. Могут ли эти прямые быть

а) параллельными б) скрещивающимися? Сделать рисунок для каждого возможного случая.

3) Точка B не лежит в плоскости $\triangle ADC$. Точки M, N и P – середины отрезков BA, BC, BD соответственно. а) Доказать, что плоскости (MNP) и (ADC) параллельны; б) Найдите площадь треугольника MNP, если $S_{\triangle ADC} = 48 \text{ см}^2$.

Вариант 2.

1) Основание трапеции ABCD лежит в плоскости α . Через точки B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках E и F соответственно.

1) Каково взаимное расположение EF и AB?

2) Чему равен угол между прямыми EF и AB, если угол ABC = 150° . Ответ обоснуйте.

2) Прямые a и b лежат в пересекающихся плоскостях α и β . Могут ли эти прямые быть

а) параллельными б) скрещивающимися? Сделать рисунок для каждого случая.

3) В тетраэдре DABC точки M, N и P – середины рёбер DA, DB, DC соответственно.

а) Доказать, что плоскости (MNP) и (ABC) параллельны.

б) Найти площадь $\triangle ABC$, если $S_{\triangle MNP} = 14 \text{ см}^2$.

Задание 2. Параллельность плоскостей и прямых в пространстве»

Теоретические сведения к практической работе:

Признаки параллельности прямой и плоскости

1) Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

2) Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности плоскостей

1) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

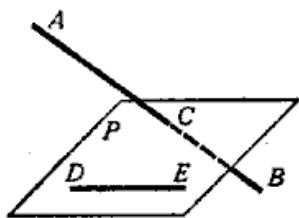
2) Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности прямых в пространстве

1) Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

2) Если в одной из пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то она параллельна линии пересечения плоскостей.

Параллельные прямые



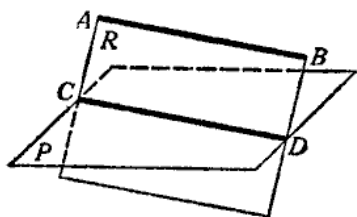
Возьмём, например, две такие прямые AB и DE , из которых одна пересекает некоторую плоскость P , а другая лежит на ней, но не проходит через точку (C) пересечения первой прямой и плоскости P .

Через такие две прямые нельзя провести плоскость, потому что в противном случае через прямую и точку C проходили бы две различные плоскости: одна P , пересекающая прямую AB , и другая, содержащая её, а это невозможно.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, конечно, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; однако их не называют параллельными.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

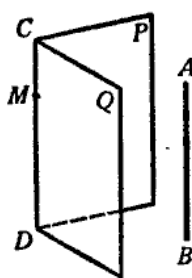
Прямая и плоскость параллельные между собой



Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

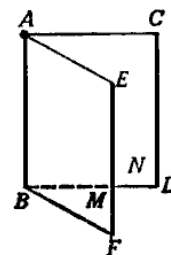
Если прямая (AB) параллельна какой-нибудь прямой (CD), расположенной в плоскости (P), то она параллельна самой плоскости.

Если плоскость (R) проходит через прямую (AB), параллельную другой плоскости (P), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения (CD) параллельна первой прямой (AB).



Если прямая (AB) параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей (P и Q), то она параллельна линии их пересечения (CD).

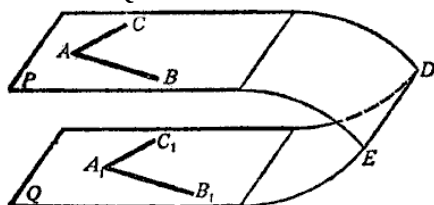
Если две прямые (AB и CD) параллельны третьей прямой (EF), то они параллельны между собой.



Параллельные плоскости

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если две пересекающиеся прямые (AB и AC) одной плоскости (P) соответственно параллельны двум прямым (A_1B_1 и A_1C_1) другой плоскости (Q), то эти плоскости параллельны. Прямые AB и AC параллельны плоскости Q .



Задания для самостоятельного решения:

Решите следующие задачи (выполнить чертеж, дать подробные пояснения):

1) Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости a , а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N . Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.

2) Сколько существует плоскостей, проходящих через данные прямую и точку в пространстве?

3) В пространстве даны прямая и точка M . Сколько существует прямых, проходящих через M и параллельных прямой a ?

4) Даны плоскость и точка M вне плоскости. Сколько существует прямых, проходящих через M и параллельных плоскости?

- 5) В пространстве даны две параллельные прямые a и b . Сколько существует плоскостей, проходящих через прямую a и параллельных прямой b ?
- 6) Даны две скрещивающиеся прямые a и b . Сколько существует пар параллельных плоскостей, одна из которых проходит через a , а другая – через b ?
- 7) В пространстве даны две пересекающиеся прямые a и b и не лежащая на них точка M . Сколько существует плоскостей, проходящих через M и параллельных прямой a и b ?

Задание 3. Решение задач на перпендикуляр и наклонную

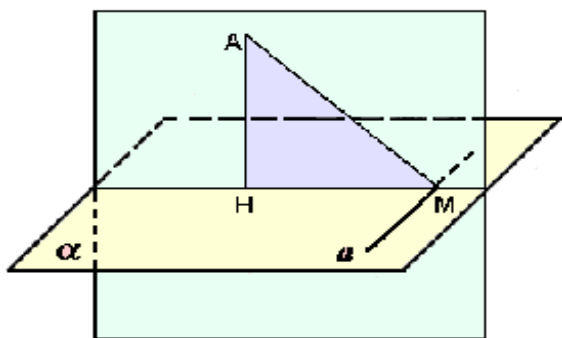
Теоретические сведения к практической работе:

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.

Перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.

Расстоянием от точки до плоскости называется *длина перпендикуляра*, проведенного из этой точки к плоскости.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной*.



AH- перпендикуляр

AM- наклонная

HM – проекция наклонной на данную плоскость

a - прямая, проходящая через основание наклонной

Задания для самостоятельного решения

1. Наклонная AM, проведенная из точки A к данной плоскости, равна d . Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен 45° ?
2. Из точки A, удаленной от плоскости γ на расстояние d , проведены к этой плоскости наклонные AB и AC под углом 30° к плоскости. Их проекции на плоскость γ образуют угол в 120° . Найдите BC.

Задание 4. Решение задач на теорему о трех перпендикулярах

Теоретические сведения к практической работе:

Опр. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

В задачах часто используется теорема о 3-х перпендикулярах:

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Обратная теорема

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции.

Задания для самостоятельного решения:

Вариант 1

№1. Через вершину В квадрата ABCD проведена прямая BF перпендикулярно его плоскости. Найдите расстояние от точки F до вершины С, если $BF=8$ см, сторона квадрата равна 4 см.

№2. Дан прямоугольник ABCD. Через вершину В проведена прямая BM перпендикулярно к его плоскости. Найдите AD, если $AM=5$ см, $MD=8$ см.

№3. Через точку О пересечения диагоналей квадрата со стороной 5 см проведена прямая OK=6 см перпендикулярно к плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки А до вершины квадрата

№4. Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного $\triangle ABC$, $AB=AC=5$, $BC=6$, $AD=12$, AE-высота $\triangle ABC$. Найдите AE, DE, BD, DC

Вариант 2

№1. Через вершину В квадрата ABCD проведена прямая BF перпендикулярно его плоскости. Найдите расстояние от точки F до вершины А, если $BF=8$ см, сторона квадрата равна 4 см.

№2. Дан прямоугольник ABCD. Через вершину В проведена прямая BM перпендикулярно к его плоскости. Найдите AD, если $AM=3$ см, $MD=7$ см.

№3. Через точку О пересечения диагоналей квадрата со стороной 10 см проведена прямая OK=5 см перпендикулярно к плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки А до вершины квадрата.

№4. Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного $\triangle ABC$, $AB=AC=5$, $BC=6$, $AD=12$, AE-высота $\triangle ABC$. Найдите AE, DE, BD, DC

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 5

Тема занятия: Решение задач. Координаты и векторы (2 часа)

Содержание темы: обобщить и систематизировать знания по теме «Координаты и векторы»; закрепить умения использовать полученные знания для решения задач в том числе с применением компьютерной техники.

Планируемые образовательные результаты: обобщить и систематизировать знания по теме.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Ответить на контрольные вопросы:

- Связь координат вектора с координатами начала и конца.
- Вычисление длины вектора.
- Формула расстояния между двумя точками.
- Скалярное произведение векторов.
- Формула для нахождения координат середины отрезка.
- Условие коллинеарности двух векторов

Задание 2. Выполнить задания

1. Точка А – середина отрезка MN. Найти координаты точки А и длину отрезка MN, если N (5; 2; -3); M (3; -2; 1)

2. Точки А (-2; -4; 1) и В (-5; -6; -1) и вершины параллелограмма ABCD, точка О (1; 3; 2) – точка пересечения диагоналей. Найти координаты вершин С и D.

3. Даны точки А (-2; 1; 3), В (3; -2; -1), С (-3; 4; 2).

Найти:

- 1) Координаты векторов
- 2) Модули векторов

- 3) Координаты векторов
- 4) Даны векторы
5. Вычислить скалярное произведение векторов

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 6

Тема занятия: Практикоориентированные задачи на координатной плоскости (4* часа)

Содержание темы: отработать этапы построения угловой проекции комнаты

Планируемые образовательные результаты: научились отличать фронтальную проекцию от угловой; закрепить умения построения угловой проекции комнаты, отработать навыки построения геометрических фигур.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка, миллиметровая бумага, компьютер, проектор, экран.

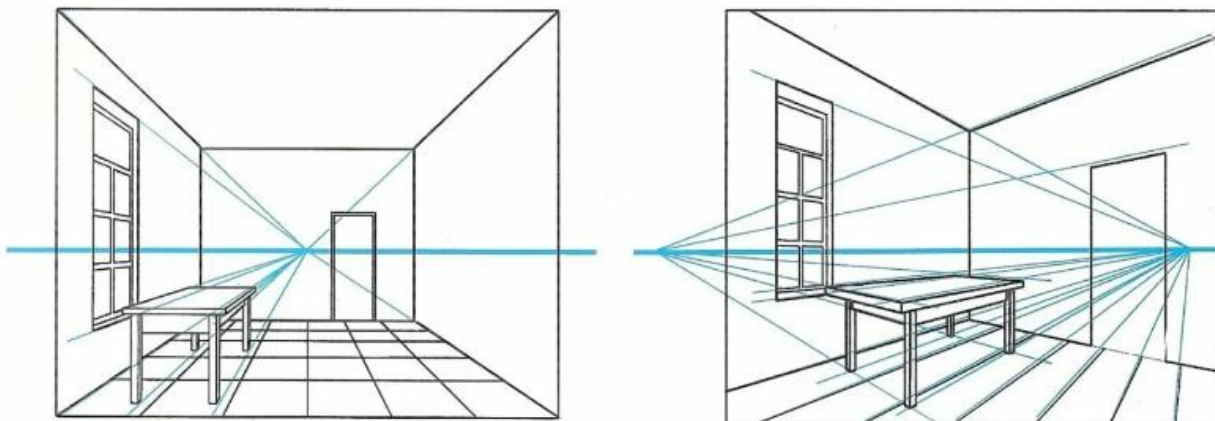
Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Прочитайте теоретические сведения

Проекция (лат. *Projectio* – «выбрасывание вперёд») – это изображение трёхмерной фигуры на так называемой картинной (проекционной) плоскости способом, представляющим собой геометрическую идеализацию оптических механизмов зрения, фотографии. Термин *проекция* в этом контексте также означает метод построения такого изображения и технические приёмы, в основе которых лежит этот метод. Широко применяется в инженерной графике, архитектуре, живописи и картографии. Изучением методов построения проекций как инженерная дисциплина занимается начертательная геометрия. Обобщение параллельной проекции для отображения точек, фигур, векторов пространства любой размерности на его подпространство любой размерности.

Фронтальная и угловая перспективы интерьера

В угловой перспективе используют две точки схода. У фронтальной перспективы применяется одна точка схода.



Особенности фронтальной перспективы: Картинная плоскость на плане комнаты выбирается параллельно дальней стене и перпендикулярно другим стенам. Прямые, перпендикулярные картинной плоскости на плане, в перспективе направлены в главную точку картины – P , располагающуюся на линии горизонта h . Прямые, параллельные картинной плоскости на плане, в перспективе параллельны линии горизонта и основанию картины.

Особенности угловой перспективы: Картинная плоскость на плане комнаты выбирается под острым углом к стенам. Горизонтальные прямые, на плане, в перспективе направлены в точку схода F_1 , располагающуюся на линии горизонта h слева от главной точки картины P . Вертикальные прямые, на плане, в перспективе направлены в точку схода F_2 , располагающуюся на линии горизонта h справа от главной точки картины P .

Последовательность построения:

1. Продумать, какова будет точка зрения на предметы, на каком уровне находится линия горизонта и точка схода.
2. Наметить линии перспективы комнаты – пола, стен, потолка, окна.
3. Построить объемы предметов мебели, соотнося направления ребер с линиями схода в той перспективе, которую вы наметили ранее.
4. Определить источник света и обозначьте штриховкой основные соотношения света и тени.

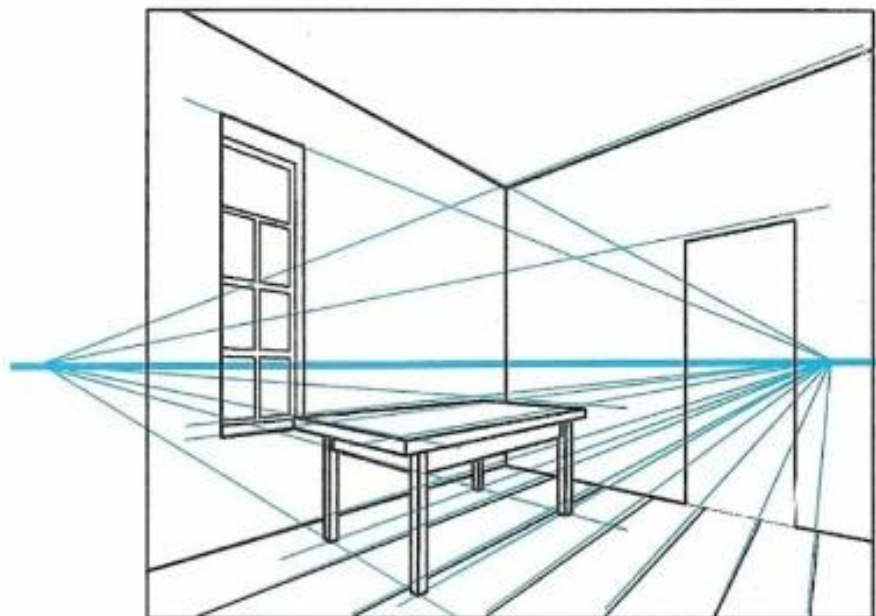
Этапы построения угловой проекции комнаты можно посмотреть на сайте <https://tvoichai.ru/chertezh-komnaty-uglovaya-perspektiva/>

Демонстрация видеоролика «Построение угловой перспективы» <https://www.youtube.com/watch?v=MUGRFUa7r1A>

Задание 2. Выполните построение угловой проекции комнаты, с учетом, выбранной на прошлом занятии, схемы и с расставленной мебели.

Последовательность построения:

1. Продумайте, какой угол комнаты вы будете строить, и на каком уровне будет находиться линия горизонта.
2. Наметьте линии перспективы комнаты – пола, стен, потолка, окна, двери.
3. Постройте объемы предметов мебели, соотнося направления ребер с линиями схода.



Этапы построения угловой проекции комнаты можно посмотреть на сайте <https://tvoichai.ru/chertezh-komnaty-uglovaya-perspektiva/>

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 7

Тема занятия: Решение задач «Основы тригонометрии. Тригонометрические функции» (2 часа)

Содержание темы: обобщить и систематизировать знания и умения решения тригонометрических уравнений и неравенств

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Решите уравнения:

- а) $\sin x = \frac{1}{2}$ б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ в) $\operatorname{tg} x = 1$ г) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$
д) $2 \cos 2x + \sqrt{2} = 0$ е) $3 \sin x + 6 = 0$ ж) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$ з) $\operatorname{ctg} x - 1 = 0$

3. Решить уравнения, сделав подстановку:

- а) $2 \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0$
б) $2 \cos^2 x + 5 \cos x + 1 = 0$
в) $2 \operatorname{ctg}^2 x + 3 \operatorname{ctg} x = 5$

4. Решите уравнения методом разложения на множители:

- а) $5 \sin x + 3 \sin x \cos x = 0$ б) $\sin 4x - \sin 2x = 0$

5. Решите уравнения, используя однородность:

- а) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$ б) $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$

6. Решите неравенства:

- а) $\cos x > \frac{1}{2}$ б) $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ в) $\operatorname{ctg} x < -1$ г) $\operatorname{tg} x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 8

Тема занятия: Простейшие тригонометрические неравенства (4 часа)

Содержание темы: научиться решать тригонометрические неравенства и разобрать примеры их применения в обыденной жизни

Планируемые образовательные результаты: развиты умение решать тригонометрические неравенства

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка, таблица значений тригонометрических функций

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Прочитать теоретический материал, разобрать методы решения тригонометрических неравенств

Решение простейших тригонометрических неравенств $\sin x < 0$, $\sin x > 0$

$\sin x \leq 0$, $\sin x \geq 0$

Учащимся предлагается воспользоваться карточкой № 1 (формат А-4) со следующим содержанием.

Карточка № 1.

Алгоритм решения тригонометрических неравенств.

1. На оси ординат единичной окружности отмечаем точку, соответствующую значению a (примерно).
2. Через полученную точку проводим прямую параллельно другой оси системы координат до пересечения с окружностью (Точки пересечения можно соединить с центром окружности).
3. На единичной окружности в точках пересечения записываем числа, соответствующие этим точкам.

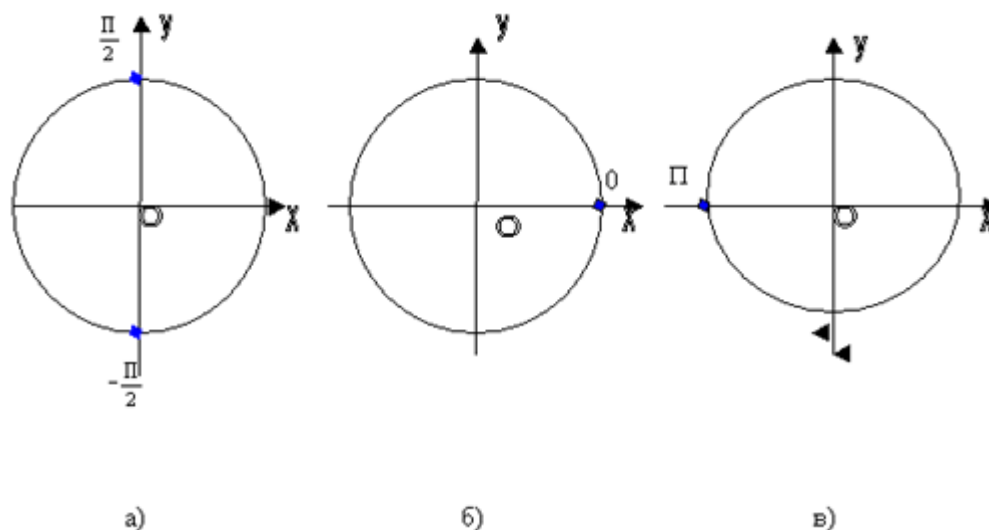


Рис. 5

Учащиеся самостоятельно выполняют чертеж иллюстрирующий решение уравнения $\cos x = a$ для случая $0 < a < 1$ (Рис. 4, а), для случая $-1 < a < 0$ (Рис. 4, б), для случая $a = 0$ (Рис. 5, а), для случая $a = 1$ (Рис. 5, б), для случая $a = -1$ (Рис. 5, в) и записывают решение уравнения для каждого из них по аналогии решения уравнения $\sin x = a$.

Затем на экране высвечиваются чертежи соответствующие рисункам 4(а, б) и 5(а, б, в) с записью решения уравнения $\cos x = a$.

Проводится обсуждение выполненной работы.

Решение неравенства $\cos x > -\frac{1}{2}$

Решение неравенства проводится одним из учащихся на доске. Учащиеся на карточке при максимальной самостоятельности, используя рисунок, записывают решение данного неравенства (Рис. 6, а). При необходимости учитель оказывает помощь учащемуся у доски и учащимся класса. Закрепляется алгоритм решения неравенства.

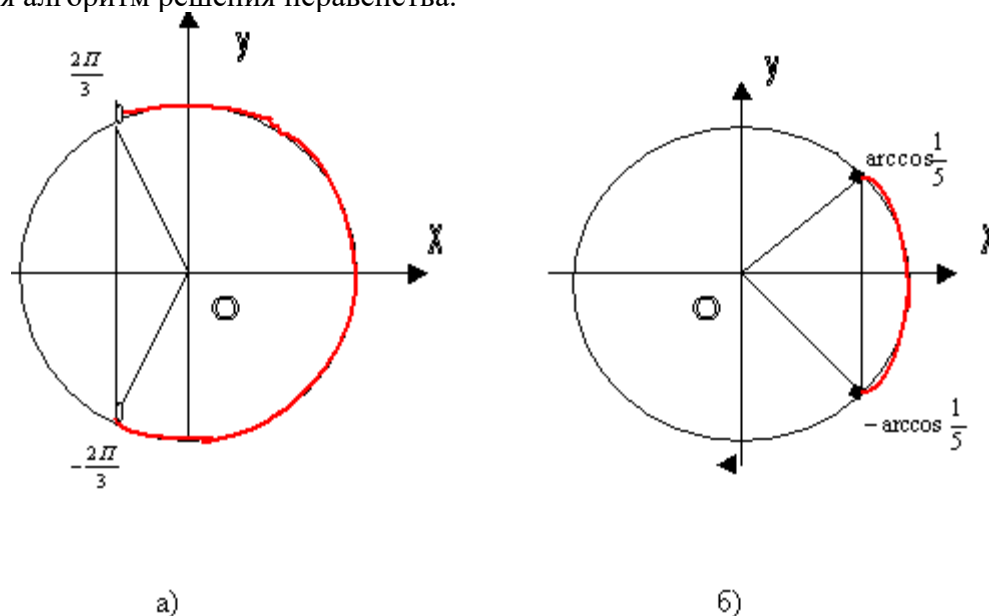


Рис. 6

Ответ: $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

После решения этого неравенства учащимся предлагается самостоятельно решить неравенство $\cos x \geq \frac{1}{5}$ (Рис. 6, б)

$$-\arccos \frac{1}{5} + 2\pi n \leq x \leq \arccos \frac{1}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

При проверке решений используется изображение на экране.

Уравнения $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$

На экране высвечивается рисунок 7, а, б, по которому разбирается решение уравнений.

Здесь нужно заострить внимание учащихся на наличие двух дуг, симметричных относительно начала координат и в связи с этим на соответствующую запись ответа.

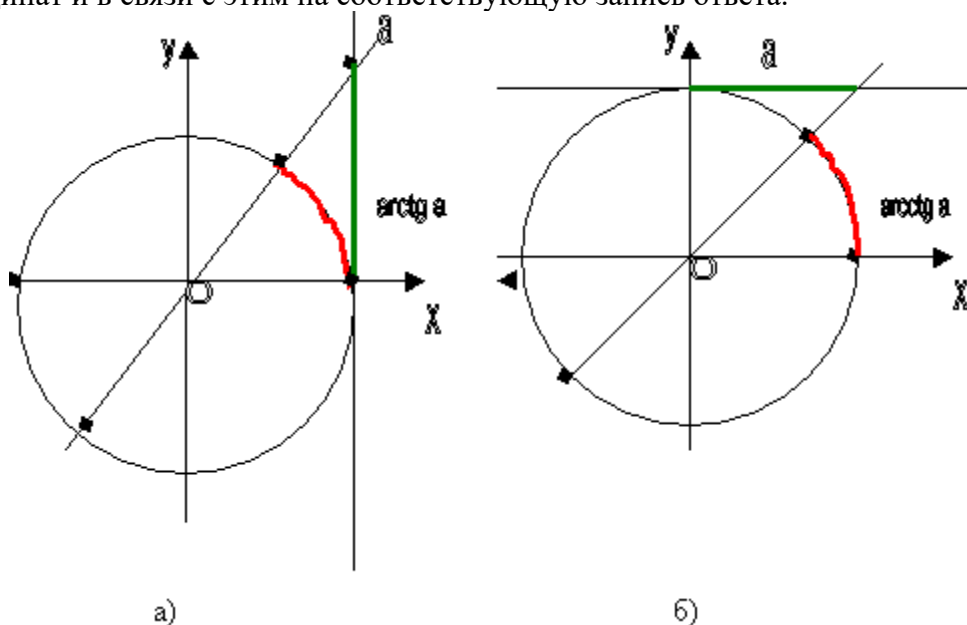


Рис. 7

Ответ: $x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $x = \operatorname{arccotg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Решение неравенств $\operatorname{tg} x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{ctg} x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

Учитель у доски объясняет решение данных неравенств. Решение неравенств учащиеся оформляют в тетрадях. Целесообразно рассмотреть решение нестрогих неравенств, чтобы напомнить об области определения тангенса и котангенса, так как строгие неравенства не подчеркивают того, что тангенс и котангенс определены не для любого значения аргумента.

По результатам объяснения учителя учащиеся получают рисунок 8(а, б) с записью ответа.

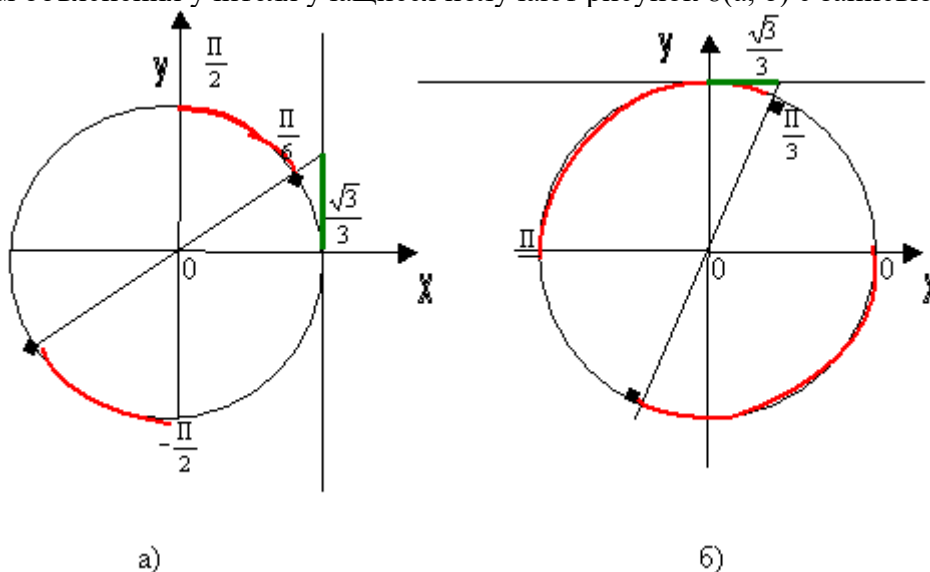


Рис. 8

Ответ: а) $x \in \left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$; б) $x \in \left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \pi + k\pi \right], k \in \mathbb{Z}$

В конце занятия решается неравенство:

$$-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < \frac{2}{5} \text{ (Рис. 9)}$$

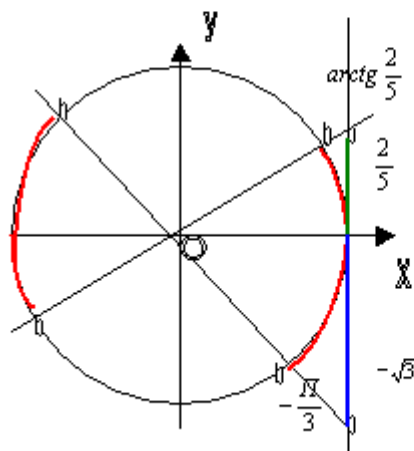


Рис. 9

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \operatorname{arctg} \frac{2}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Задание 2. Выполните решение неравенств

$$\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x \geq 1$$

$$\operatorname{tg} x \leq -1$$

$$\operatorname{ctg} x \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Задание 3. Решите неравенства

Вариант -1

$$1) \sin(x/2 - \pi/4) < \sqrt{2}/2$$

$$2) \cos(\pi/3 + 3x) < -1/2$$

$$3) \sin(2x - \pi/6) \geq -\sqrt{3}/2$$

$$4) 2\cos(4x - \pi/6) > \sqrt{3}$$

$$5) 1/2 < \sin x \leq \sqrt{2}/2$$

Вариант -2

$$1) \sin(2x - \pi/6) < 1/2$$

$$2) \cos(\pi/3 + 1/2x) \geq -\sqrt{3}/2$$

$$3) \cos(3x - \pi/4) \leq -\sqrt{2}/2$$

$$4) \sqrt{2} \sin(x/2 + \pi/4) \geq 1$$

$$5) 1/2 \leq \cos x < \sqrt{2}/2$$

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 9

Тема занятия: Использование свойств тригонометрических функций в производственных задачах. (4* часа)

Содержание темы: обобщить и систематизировать знания по теме; закрепить умения использовать полученные знания для решения задач в том числе с применением компьютерной техники.

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Известны динамические ряды по основному капиталу, численности рабочих и ВВП за 20-летний период деятельности некоторой хозяйственной системы.

Требуется определить параметры производственных функций различного вида, методы их построения и характеристики: 1) модель Леонтьева, 2) линейная и 3) функция Кобба-Дугласа.

Для полученных функций построить графики кривых производства, построить изокванты и определить оптимальные затраты для выпуска заданного объема. Спрогнозировать объем производства на следующий период, исходя из плановых затрат ресурсов, и отметить его на соответствующей изокванте. Определить эластичность по труду и капиталу.

Исходные данные для эконометрического моделирования производственных функций представлены в таблице:

Y	K	L
112.5	2.27	2.12
116.4	1.94	2.2
111.6	2.32	2.11
108.9	2.49	2.03
116.5	2.57	2.21
104.5	2.01	1.88
102.7	1.87	1.91
110.2	2.39	
104.7	2.18	1.9
109.4	2.17	1.99
101.1	1.8	1.54
102.6	2.36	1.74
128.5	2.5	2.23
122.5	2.27	2.14
105.2	2.33	1.87

Представление результатов практического задания: Работа предоставляется в виде документа Excel, с полноценным оформлением решения заданий.

Практическое занятие № 10

Тема занятия: **Применение комплексных чисел (2 часа)**

Содержание темы: обобщить и систематизировать знания по теме «Комплексные числа»; закрепить умения использовать полученные знания для решения задач.

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание: Пусть даны комплексные числа $z_1 = 5+i$ $z_2 = 1+2i$

1. Изобразить комплексные числа на комплексной плоскости.
2. Определить длину и аргумент каждого комплексного числа.
3. Представить данные комплексные числа в тригонометрической и показательной форме.
4. Найти $z_1 \pm z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ в алгебраической и тригонометрической форме.
5. Вычислить $\sqrt[n]{z_1}$ и z_2^n в показательной форме.

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 11

Тема занятия: Решение задач на применение производной. (2 часа)

Содержание темы: обобщить и систематизировать знания по теме «Производная»; закрепить умения использовать полученные знания для решения задач

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме

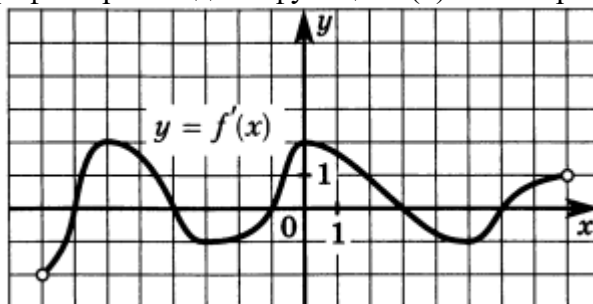
Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

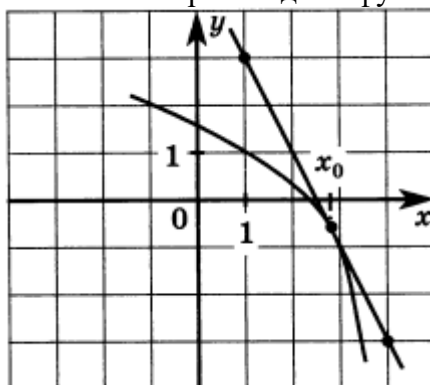
Задания для самостоятельного выполнения:

Решите задачи с полным оформлением

1. Маховик вращается вокруг оси по закону $\varphi(t)=t^4-1$. Найдите угловую скорость $\varphi'(t)$ маховика в момент времени 2 секунды
2. Две точки движутся по закону $s_1(t)=2,5t^2-6t+1$ $s_2(t)=0,5t^2+2t-3$. В какой момент времени их скорости будут равны? ($t=2$ с)
3. В какой точке касательная к графику функции $y=0,5x^2+1$ параллельна прямой $y=-x-1$ $(-1;1,5)$
4. На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$ на интервале $(-8;8)$



- Сколько промежутков возрастания имеет функция
 - Укажите длину наибольшего из них
 - Сколько точек экстремума имеет функция
 - Укажите количество точек максимума и минимума
 - Укажите количество точек, в которых касательная параллельна прямой $y=2x+3$, $y=-0,5x+1$
5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0



Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 12

Тема занятия: Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах (6* часов)

Содержание темы: обобщить и систематизировать знания по теме «Производная»; закрепить умения использовать полученные знания для решения задач.

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Провести дидактическую игру «Крестики- нолики» по теме «Производная функции». К доске приглашаются два студента. На доске подготовлено игровое поле. Первый, ответивший на вопрос преподавателя по данной теме, получает право выбрать знак («крестик» или «нолик») для себя и назвать первое окошко игрового поля. Если он решает правильно выпавшее ему задание, то имеет право поставить в данное окошко свой знак. Если ему это не удастся, то право решить его отдается второму игроку. В итоге побеждает тот, кто закрывает своими значками 3 клетки по диагонали, горизонтали, вертикали или больше, чем 4 клетки.

Примеры:

$$1. f(x) = x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} - 7,$$

$$2. f(x) = \sqrt{x^3} - 2x\sqrt{x} + \pi,$$

$$3. f(x) = \frac{2}{x-1},$$

$$4. f(x) = \ln \cos x,$$

$$5. f(x) = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$6. f(x) = x + \frac{4}{x},$$

$$7. f(x) = x^2(x+3),$$

$$8. f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 - 3,$$

$$9. f(x) = 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x.$$

Задание 2. Разберите решение задачи.

Молодой предприниматель Михайлов Юрий в свете экономического кризиса решил выкупить нерентабельное провинциальное перерабатывающее предприятие и пригласил экономиста Гульдерова Германа помочь с расчетами по оптимизации расходов. Одна из задач поставленных перед Германом была следующая: найти, при каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет наименьшим.

Решение.

Вспомним 3 этапа математического моделирования, применяемые при решении задач на оптимизацию (показ на экране):

- 1 этап. Составление математической модели.
- 2 этап. Работа с составленной моделью.
- 3 этап. Ответ на вопрос задачи.

1 этап. Составление математической модели.

Составление модели облегчается тем, что известна форма банки и оговорено, что она должна быть заданной емкости. Это существенно для составления модели. Существенным является также требование, чтобы расход жести на изготовление банки был минимальным. Это требование означает, что площадь полной поверхности банки, имеющей форму цилиндра, должна быть наименьшей; существенны и размеры банки. Несущественны для составления математической модели конкретное (численное) значение емкости банки и вид консервов (мясных, овощных), для которых банка предназначена.

Обозначив емкость банки через V см³, сформулируем задачу: Определить размеры цилиндра с объемом V см³ так, чтобы площадь его полной поверхности была наименьшей.

Для решения задачи обозначим радиус основания цилиндра через x , а высоту его через h (все измерения в сантиметрах). Тогда объем цилиндра

$$V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}.$$

Полная поверхность цилиндра:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}.$$

$$S(x) = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}.$$

Итак,

Так как переменная x может принимать только положительные значения, решение задачи сводится к нахождению наименьшего значения $S(x)$ на $(0; \infty)$.

2 этап. Работа с составленной моделью.

Найдем производную $S'(x)$:

$$S'(x) = \left(\frac{2\pi x^3 + 2V}{x} \right)' = \left(\frac{6\pi x^2 x - (2\pi x^3 + 2V)}{x^2} \right) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}.$$

Для нахождения критических точек решим уравнение $S'(x) = 0$.

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Корень уравнения:

$$\text{При } x < 0 < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad S'(x) < 0, \text{ а при } x > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad S'(x) > 0.$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Следовательно, в точке $S(x)$ имеет минимум.

X	$(0; \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}})$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; \infty)$
S'	–	0	+
S		min	

Следовательно, функция в этой точке достигает наименьшего значения.

Таким образом, площадь полной поверхности цилиндра, имеющего объем V , будет наименьшей

$$h = 2x = 2 \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}},$$

при

т.е. когда цилиндр равносторонний.

Задание 3. Решите задачи.

А) Гарданов Марсель решил сделать своей маме подарок к 8 Марта и заказал другу юности Сабирову Денису шкатулку из драгоценного металла. В мастерскую он принес кусок листа из этого металла размером 80 X 50 см. Требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и загибая оставшиеся кромки.

Б) Требуется огородить прямоугольный участок земли площадью 294 м^2 и разделить этот земельный участок забором на 2 равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора окажется минимальной?

В) Из куска железа в форме прямоугольного треугольника с катетами 2 м и 4 м необходимо вырезать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными катетам треугольника.

Г) Разрежьте отрезок длиной 18 см на две части так, чтобы приняв их за катеты, получить прямоугольный треугольник с наименьшей гипотенузой.

Д) Окно имеет форму прямоугольника, периметр которого равен 8 м. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 13

Тема занятия: Симметрия многогранников (2 часа)

Содержание темы: сформировать представление о симметрии, примеры симметрии многогранников, симметрия в окружающем нас мире.

Планируемые образовательные результаты: знать виды правильных многогранников, уметь видеть и определять симметрию в окружающем мире.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка, калькулятор

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Прочитать и законспектировать теоретический материал

Эпиграф

"Правильных многогранников вызывающе мало, но этот весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук".

Л. Кэрролл

На данный момент уже вы имеете представление о таких многогранниках как призма и пирамида. На сегодняшнем уроке у вас есть возможность значительно расширить свои знания о многогранниках, вы узнаете о так называемых правильных выпуклых многогранниках. С некоторыми понятиями вы уже знакомы - это многогранники и выпуклые многогранники. Вспомним их.

- Дайте определение многогранника.
- Какой многогранник называется выпуклым?

Нами уже использовались словосочетания "правильные призмы" и "правильные пирамиды". Оказывается, новая комбинация знакомых понятий образует совершенно новое с геометрической точки зрения понятие. Какие же выпуклые многогранники будем называть правильными? Послушайте внимательно определение.

Выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многогранниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Может показаться, что вторая часть определения является лишней и достаточно сказать, что выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многогранниками с одним и тем же числом сторон. Достаточно ли этого на самом деле?

Посмотрите на многогранник. (Демонстрируется модель многогранника, который получается из двух правильных тетраэдров, приклеенных друг к другу одной гранью). Оставляет ли он

впечатление правильного многогранника? (*Нет!*). Посмотрим на его грани - правильные треугольники. Посчитаем число рёбер, сходящихся в каждой вершине. В некоторых вершинах сходятся три ребра, в некоторых - четыре. Вторая часть определения правильного выпуклого многогранника не выполняется и рассматриваемый многогранник, действительно, не является правильным. Таким образом, когда будете давать определение, помните об обеих его частях.

Всего существует пять видов правильных выпуклых многогранников. Их гранями являются правильные треугольники, правильные четырёхугольники (квадраты) и правильные пятиугольники.

Названия этих многогранников пришли из Древней Греции, и в них указывается число граней:

- "эдра" - грань
- "тетра" - 4
- "гекса" - 6
- "окта" - 8
- "икоса" - 20
- "додека" - 12

Вам необходимо запомнить названия этих многогранников, уметь охарактеризовать каждый из них и доказать, что других видов правильных многогранников, кроме перечисленных пяти, нет.

Обращаю внимание на слова Л. Кэрролла, которые являются

эпиграфом сегодняшнего урока: "Правильных многогранников вызывающе мало, но этот весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук".

Изучая любые многогранники, естественнее всего подсчитать, сколько у них граней, сколько рёбер и вершин. Подсчитаем и мы число указанных элементов Платоновых тел и занесём результаты в таблицу № 1.

Анализируя таблицу № 1, возникает вопрос: "Нет ли закономерности в возрастании чисел в каждом столбце?" По-видимому, нет. Например, в столбце "грани" казалось бы, просматривается закономерность ($4 + 2 = 6$, $6 + 2 = 8$), но затем намеченная закономерность нарушается ($8 + 2 \neq 12$, $12 + 2 \neq 20$). В столбце "вершины" нет даже стабильного возрастания.

Число вершин то возрастает (от 4 до 8, от 6 до 20), а то и убывает (от 8 до 6, от 20 до 12). В столбце "рёбра" закономерности тоже не видно.

Но можно рассмотреть сумму чисел в двух столбцах, хотя бы в столбцах "грани" и "вершины" ($\Gamma + В$). Составим новую таблицу своих подсчётов (см. табл. № 2). Вот теперь закономерности может не заметить только "слепой". Сформулируем её так: "Сумма числа граней и вершин равна числу рёбер, увеличенному на 2", т.е.

$$\Gamma + В = P + 2$$

Итак, мы вместе "открыли" формулу, которая была подмечена уже Декартом в 1640 г., а позднее вновь открыта Эйлером (1752), имя которого с тех пор она носит. Формула Эйлера верна для любых выпуклых многогранников.

Запомните эту формулу, она пригодится вам для решения некоторых задач.

Большой интерес к формам правильных многогранников проявляли также скульпторы, архитекторы, художники. Их всех поражало совершенство, гармония многогранников. Леонардо да Винчи (1452 - 1519) увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих



полотнах. Сальвадор Дали на картине "Тайная вечеря" изобразил И. Христа со своими учениками на фоне огромного прозрачного додекаэдра.

Учёным достаточно хорошо изучены правильные выпуклые многогранники, доказано, что существует всего пять видов таких многогранников, но сам ли человек их придумал. Скорее всего - нет, он "подсмотрел" их у природы.

"Правильные многогранники и природа": Правильные многогранники встречаются в живой природе. Например, скелет одноклеточного организма феоцитарии (*Circjgjnja icosahdra*) по форме напоминает икосаэдр (рис. 8).

Чем же вызвана такая природная геометризация феоцитарий? По-видимому, тем, что из всех многогранников с тем же числом граней именно икосаэдр имеет наибольший объём при наименьшей площади поверхности. Это свойство помогает морскому организму преодолевать давление водной толщи.

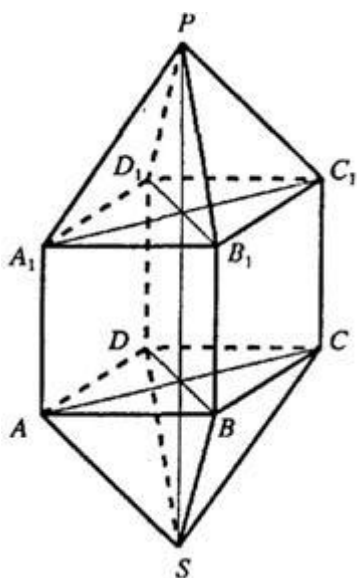
Правильные многогранники - самые выгодные фигуры. И природа этим широко пользуется. Подтверждением тому служит форма некоторых кристаллов. Взять хотя бы поваренную соль, без которой мы не можем обойтись.

Известно, что она растворима в воде, служит проводником электрического тока. А кристаллы поваренной соли (NaCl) имеют форму куба. При производстве алюминия пользуются алюминиево-калиевыми кварцами, монокристалл которых имеет форму правильного октаэдра. Получение серной кислоты, железа, особых сортов цемента не обходится без сернистого колчедана (FeS). Кристаллы этого химического вещества имеют форму додекаэдра.

В разных химических реакциях применяется сурьмянистый сернокислый натрий - вещество, синтезированное учёными. Кристалл сурьмянистого сернокислого натрия имеет форму тетраэдра.

Последний правильный многогранник - икосаэдр передаёт форму кристаллов бора (B). В своё время бор использовался для создания полупроводников первого поколения.

Задание 2. Определите количество граней, вершин и рёбер многогранника, изображённого на рисунке. Проверьте выполнимость формулы Эйлера для данного многогранника.



Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде конспекта и решения задачи в тетради.

Практическое занятие № 14

Тема занятия: Конус и его элементы. (4 часа)

Содержание темы: научить студентов, находить элементы конуса, воспитать самостоятельность, творческий подход к решению практических задач.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка.

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Построить конус и назвать его элементы

Пример.

Постройте круговой конус и проведите сечение через две образующие конуса, не являющееся осевым. Обозначьте и выпишите:

- 1) Высоту конуса.
- 2) Высоту сечения.
- 3) Расстояние от центра основания до сечения.

Задание 2. Решить задачи

1. Высота конуса равна 4. Образующая равна 5. Чему равен диаметр конуса?
2. Высота конуса равна радиусу основания. Чему равен угол между образующей и основанием конуса?
3. Образующая конуса равна 2 и наклонена к радиусу под углом 45° . Чему равна высота конуса?
4. Образующая конуса равна 2, а высота равна радиусу. Найти площадь основания.
5. Угол между образующими конуса равен 90° . Диаметр основания равен 6. Найти длину образующей.
6. Образующая конуса равна 13, а его высота равна 12. Найдите площадь осевого сечения конуса.
- 7.

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 15

Тема занятия: Решение задач. Многогранники и тела вращения. (6* часа)

Содержание темы: Закрепить и систематизировать знания по теме.

Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка.

Задания для самостоятельного выполнения:

- повторить теоретические положения по данной теме;
- изучить схему решения заданий;
- выполнить задания практической работы

Многогранник.

1. Необходимый теоретический материал (3 часа)

Многогранник – геометрическое тело, ограниченное плоскими многоугольниками.

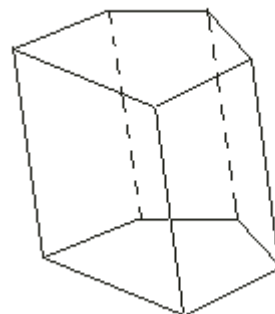
Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются *гранями*, их стороны – *ребрами*, а вершины – *вершинами* многогранника. Отрезки, соединяющие две какие-нибудь вершины, не лежащие на одной грани, называются *диагоналями* многогранника.

Мы будем рассматривать только выпуклые многогранники, т.е. такие, которые расположены по одну сторону от каждой своей грани.

Призма.

Призмой называется многогранник, у которого две грани - равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани - параллелограммы.

Многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, называются *основаниями* призмы; перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки одного основания на другое, называется *высотой* призмы. Параллелограммы называются *боковыми гранями* призмы, а их стороны, соединяющие соответственные вершины оснований, - *боковыми рёбрами*. У призмы все боковые рёбра равны, как отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями.



Плоскость, проведённая через какие-нибудь два боковых ребра, не принадлежащих одной грани призмы, называется *диагональной плоскостью*.

Призма, боковые ребра которой перпендикулярны основаниям, называется *прямой*, в противном случае — *наклонной*. Прямая призма, у которой в основаниях лежат правильные n -угольники, называется *правильной*.

Параллелепипед.

Параллелепипедом называют призму, у которой основаниями служат параллелограммы.

Прямой параллелепипед называется *прямоугольным*, если его основания - прямоугольники.

Три ребра прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, называются его *измерениями*.

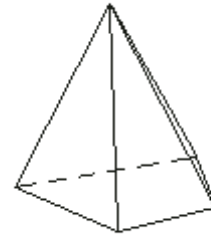
Прямоугольный параллелепипед, имеющий равные измерения, называется *кубом*.

Свойства граней и диагоналей параллелепипеда.

1. Теорема: В параллелепипеде противоположные грани равны и параллельны.
2. Теорема: В параллелепипеде все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.
3. Теорема: В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трёх его измерений.

Пирамида.

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань, называемая основанием, есть какой-нибудь многоугольник, а все остальные грани, называемые боковыми, - треугольники, имеющие общую вершину.



Общая вершина боковых треугольников называется *вершиной* пирамиды, а перпендикуляр, опущенный из вершины на основание, - её *высотой*.

Плоскость, проведённая через вершину пирамиды и какую-нибудь диагональ основания, называется *диагональной плоскостью*.

Пирамиды бывают треугольные, четырёхугольные и т.д., смотря по тому, лежит ли в основании треугольник, четырёхугольник и т.д. Треугольная пирамида называется *тетраэдром*; у такой пирамиды все четыре грани - треугольники.

Пирамида называется *правильной*, если, во-первых, её основание есть правильный многоугольник и, во-вторых, высота проходит через центр этого многоугольника. В правильной пирамиде все боковые рёбра равны между собой. Поэтому все боковые грани правильной пирамиды - равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды называется *апотемой*.

Часть пирамиды, заключённая между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется *усечённой пирамидой*. Параллельные многоугольники называются *основаниями*, а расстояние между ними - *высотой*. Усечённая пирамида называется *правильной*, если она составляет часть правильной пирамиды.

Боковая поверхность призмы и пирамиды.

1. Теорема: Боковая поверхность призмы равна произведению перпендикулярного сечения на боковое ребро.

Следствие: Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту.

2. Теорема: Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению периметра основания на половину апофемы.

3. Теорема: Боковая поверхность правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров обоих оснований на апофему.

2. Примеры

1. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна площади основания. Вычислите длину бокового ребра, если сторона основания 7 см

Решение.

Площадь правильного треугольника в основании призмы находится по формуле:

По условию задачи $a = 7$ см

Так как площадь грани призмы в данном случае будет равна $7h$, где h - высота бокового ребра, количество граней - три, то

Решение.

Площадь правильного треугольника в основании призмы находится по формуле:

По условию задачи $a = 7$ см

Так как площадь грани призмы в данном случае будет равна $7h$, где h - высота бокового ребра,

количество граней - три, то

$$49\sqrt{3} / 4 = 3 * 7h$$

$$49\sqrt{3} / 4 = 21h$$

откуда

$$h = 7\sqrt{3} / 12$$

Ответ: длина бокового ребра правильной треугольной призмы равна $7\sqrt{3} / 12$

2. Найдите площадь правильной треугольной призмы, сторона основания которой 6 см, а высота - 10 см.

Решение.

Площадь правильного треугольника в основании призмы находится по формуле:

По условию задачи $a = 6$ см откуда $S = \sqrt{3} / 4 * 36 = 9\sqrt{3}$

Поскольку у правильной треугольной призмы оснований два, то площадь оснований будет равна $9\sqrt{3} * 2 = 18\sqrt{3}$

Площадь каждой из граней будет равна $6 * 10 = 60$, а поскольку граней три, то $60 * 3 = 180$

Таким образом, площадь полной поверхности призмы будет равна $180 + 18\sqrt{3} \approx 211,18$ см кв.

Ответ: $180 + 18\sqrt{3} \approx 211,18$

3. В правильной четырёхугольной призме площадь основания 144 см^2 , а высота 14 см. Найти диагональ призмы и площадь полной поверхности.

Решение.

Правильный четырёхугольник - это квадрат.

Соответственно, сторона основания будет равна $\sqrt{144} = 12$ см.

Откуда диагональ основания правильной прямоугольной призмы будет равна

$$\sqrt{(12^2 + 12^2)} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

Диагональ правильной призмы образует с диагональю основания и высотой призмы прямоугольный треугольник. Соответственно, по теореме Пифагора диагональ заданной правильной четырёхугольной призмы будет равна:

$$\sqrt{(12\sqrt{2})^2 + 14^2} = 22 \text{ см}$$

Ответ: 22 см

4. Боковая грань правильной треугольной пирамиды представляет собой правильный треугольник, площадь которого $16\sqrt{3} \text{ см}^2$. Вычислить периметр основания пирамиды.

Решение.

Правильный треугольник - это равносторонний треугольник. Соответственно, боковая грань пирамиды представляет собой равносторонний треугольник.

Площадь равностороннего треугольника равна:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 = 3\sqrt{3} r^2$$

Соответственно:

$$16\sqrt{3} = a^2 \sqrt{3} / 4$$

$$16 = a^2 / 4$$

$$a^2 = 64$$

$$a = 8 \text{ см}$$

Основанием правильной треугольной пирамиды является правильный (равносторонний) треугольник. Таким образом, периметр основания пирамиды равен $8 * 3 = 24 \text{ см}$

Ответ: 24 см.

3. Задания к практической работе

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, апофема равна 13 см. Найдите площадь полной поверхности.
2. В правильной четырёхугольной призме площадь основания 144 см^2 , а высота 14 см.
3. Найти диагональ призмы и площадь полной поверхности.
4. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 72, боковые рёбра равны 39. Найдите площадь полной поверхности этой пирамиды.
5. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, апофема равна 12 см. Найдите площадь полной поверхности.
6. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна площади основания. Вычислите длину бокового ребра, если сторона основания 7с

Дополнительно:

1. Найти площадь правильной треугольной призмы, сторона основания которой 6 см, а высота - 10 см.
2. Боковая грань правильной треугольной пирамиды представляет собой правильный треугольник, площадь которого $16\sqrt{3} \text{ см}^2$. Вычислить периметр основания пирамиды.

Тела вращения и площади их поверхностей (3 часа)

1. Необходимый теоретический материал

Конус, цилиндр и шар — это тела вращения. Они так называются, потому что их можно получить, вращая определенную фигуру вокруг некоторой оси.

Цилиндром называется тело, которое состоит из двух кругов, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов. Эти круги называются **основаниями цилиндра**, а отрезки, соединяющие соответствующие точки оснований, — **образующими цилиндра**.

Если образующие перпендикулярны основаниям, то цилиндр называется **прямым цилиндром**.

Мы будем рассматривать только прямые цилиндры. Прямой цилиндр можно получить, если вращать прямоугольник вокруг одной из его сторон.

Высота цилиндра — это отрезок, соединяющий основания и перпендикулярный основаниям цилиндра.

Каждая образующая прямого цилиндра равна высоте.

Следующий важнейший пример тела вращения — это шар.

Шар — тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не более R от некоторой точки, которая называется **центром** шара. R называется **радиусом** шара.

Сфера — это поверхность шара. Сфера является множеством точек, отстоящих от ее центра на расстояние R .

Шар можно получить вращением полукруга вокруг его диаметра, а сферу — вращением полуокружности вокруг её диаметра.

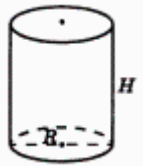
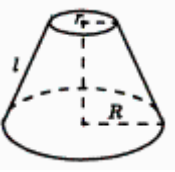
Конус — это тело, которое получается при объединении всех отрезков, соединяющих точки круга (основание конуса) с вершиной конуса.

Прямой конус — это конус, вершина которого лежит на прямой, перпендикулярной основанию и проходящей через центр основания. Эта прямая называется **осью** прямого конуса.

Высота конуса — это отрезок, проведенный из вершины конуса к основанию перпендикулярно основанию конуса. Отрезок, который соединяет вершину конуса с окружностью в основании, называется **образующей** конуса.

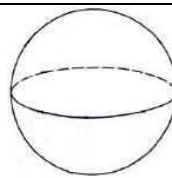
Прямой конус можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

Площади тел вращения:

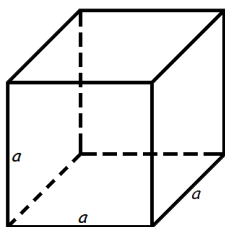
Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{\text{б.пох}} = 2 \pi R H$ Площадь полной поверхности цилиндра $S_{\text{полн}} = 2 S_{\text{о}} + S_{\text{б.пох}} = 2 \pi R (R + H)$	
Площадь боковой поверхности конуса $S_{\text{б.пох}} = \pi R l$ Площадь полной поверхности конуса $S_{\text{полн}} = S_{\text{о}} + S_{\text{б.пох}} = \pi R (R + l)$	
Площадь боковой поверхности усеченного конуса $S_{\text{б.пох}} = \pi (R + r) l$ Площадь полной поверхности усеченного конуса $S_{\text{полн}} = \pi (R^2 + r^2 + (R + r) l)$	

Площадь поверхности сферы

$$S = 4 \pi R^2$$



Объём куба



Объем куба равен кубу длины его грани.

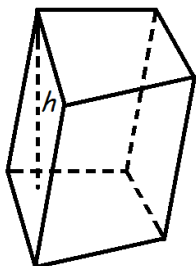
Формула объема куба:

$$V = a^3$$

где V - объем куба,

a - длина грани куба.

Объём призмы



Объем призмы равен произведению площади основания призмы, на высоту.

Формула объема призмы:

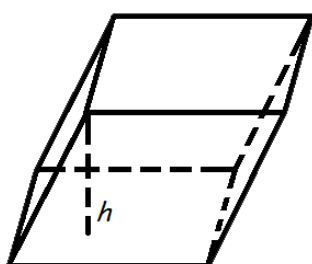
$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$$

где V - объем призмы,

$S_{\text{осн.}}$ - площадь основания призмы,

h - высота призмы.

Объём параллелепипеда



Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Формула объема параллелепипеда:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$$

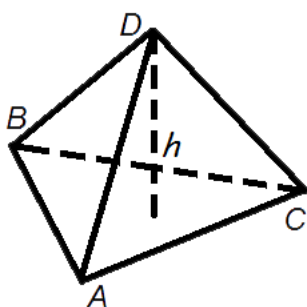
где

V - объем параллелепипеда,

$S_{\text{осн.}}$ - площадь основания,

h - длина высоты.

Объем пирамиды



Объем пирамиды равен трети от произведения площади ее основания на высоту.

Формула объема пирамиды:

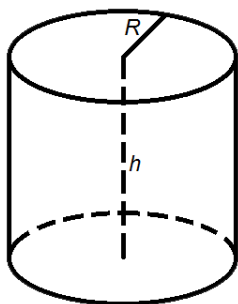
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$$

где V - объем пирамиды,

$S_{\text{осн.}}$ - площадь основания пирамиды,

h - длина высоты пирамиды.

Объем цилиндра



Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Формулы объема цилиндра:

$$V = \pi R^2 h$$

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$$

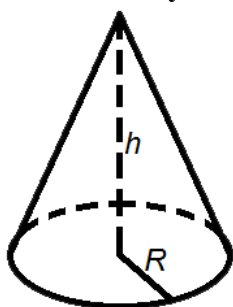
где V - объем цилиндра,

$S_{\text{осн.}}$ - площадь основания цилиндра,

R - радиус цилиндра,

h - высота цилиндра.

Объем конуса



Объем конуса равен трети от произведению площади его основания на высоту.

Формулы объема конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h$$

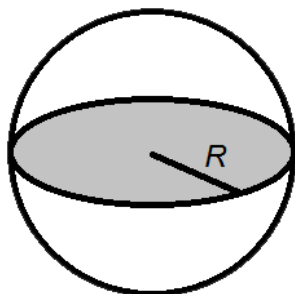
где V - объем конуса,

$S_{\text{осн.}}$ - площадь основания конуса,

R - радиус основания конуса,

h - высота конуса.

Объем шара



Объем шара равен четверем третим от его радиуса в кубе помноженного на число пи.

Формула объема шара:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

где V - объем шара,

R - радиус шара.

2. Задания к практической работе

1. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Её объём равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.
2. Образующая прямого конуса равна 4 см и наклонена к плоскости основания под углом 30° . Найдите объём конуса
3. Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 24. Найдите объём цилиндра.
4. Найдите объём конуса, полученного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой $3\sqrt{2}$ см вокруг своего катета.
5. Основание прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Найдите объём параллелепипеда, если его высота равна 4 см, а диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45° .

Дополнительно:

1. Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания которого равен 2. Площадь боковой поверхности призмы равна 48. Найдите высоту цилиндра.
2. Объём шара 228π см³. Вычислите площадь поверхности шара.
3. Радиус основания конуса равен 20 см, образующая – 20,5 см. Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии 1,5 см от его вершины. Найдите радиус полученного сечения, объем и площадь полной поверхности конуса.

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 16

Тема занятия: Определенный интеграл в жизни (4* часа)

Содержание темы: научиться определять форму полученной фигуры в сравнении с криволинейной трапецией, аналитически выражать и вычислять площадь полученной фигуры.

Планируемые образовательные результаты: развиты умение работать с формулами и применять их при решении задач.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка, таблица значений первообразных

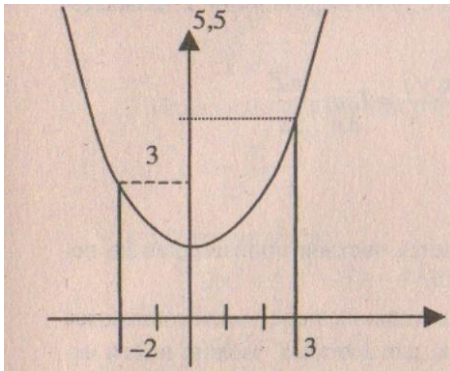
Задания для самостоятельного выполнения:

1. Разобрать примеры решения задач

Пример.

Вычислить площадь земельного участка, если на плоскости он ограничен линиями: $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$; $y = 0$; $x = -2$; $x = 3$.

$$\text{Решение. } S = \int_{-2}^3 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right) dx = \left(\frac{1}{2}x^3 + x \right) \Big|_{-2}^3 = \left(\frac{1}{6}3^3 + 3 - \left(\frac{1}{6}(-2)^3 - 2 \right) \right) = 10\frac{5}{6}.$$



Таким образом, площадь земельного участка составляет $10\frac{5}{6}$ единиц.

Пример.

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 4$.

Решение. $V = \pi \int_0^4 4x dx = 2\pi x^2 \Big|_0^4 = 32\pi$. В решении использована формула $V = \pi \int_a^b f(x) dx$.

Пример.

Вычислить массу стержня, расположенного на отрезке $[0; 6]$, если плотность задается функцией $p(x) = 2x^2 + 3$.

Решение. Используем формулу $m = \int_a^b p(x) dx$, где $p(x)$ - плотность стержня.
 $m = \int_0^6 (2x^2 + 3) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + 3x \right) \Big|_0^6 = \frac{2 \cdot 6^3}{3} + 3 \cdot 6 = 162$.

2. Выполнить практические задания

Задание 1. Воспользовавшись соответствующим приложением определенного интеграла к задачам геометрии, найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

№	Задание	№	Задание
1	$y = x^2, y = 7x - 12$	6	$y = \ln x, y = 1, y = 4$
2	$y = x^2, y = \frac{1}{3}x^3$	7	$y = x^2 - 2x + 3, y = 3x - 1$
3	$y = \ln x, x = e^{-1}, x = e$	8	$y = , y = x$
4	$y = , x = 0, x = e$	9	$y = - , y = -9x$
5	$y = 9 - x^2, y = 0$	10	$y = x^2, y =$

Задание 2. Решите задачу.

№	Задание	№	Задание
1	Скорость движения точки определяется по закону $v =$. Найдите путь S , пройденный точкой за 3-ю секунду	6	Скорость движения точки определяется по закону $v =$. Найдите путь S , пройденный точкой за 2-ю секунду

2	Скорость движения точки определяется по закону $v=$. Найдите путь S , пройденный точкой за 4-ю секунду	7	Скорость движения точки определяется по закону $v=$. Найдите путь S , пройденный точкой за 10-ю секунду
3	Скорость движения точки определяется по закону $v=$. Найдите путь S , пройденный точкой за 4-ю секунду	8	Скорость движения точки определяется по закону $v=$. Найдите путь S , пройденный точкой за 4-ю секунду
4	Скорость движения точки определяется по закону $v=$. Найдите путь S , пройденный точкой за 2-ю секунду	9	Скорость движения точки определяется по закону $v=$. Найдите путь S , пройденный точкой за 4-ю секунду
5	Скорость движения точки определяется по закону $v=$. Найдите путь S , пройденный точкой за 3-ю секунду	10	Скорость движения точки определяется по закону $v=$. Найдите путь S , пройденный точкой за 4-ю секунду

Задание 3. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями. Сделайте чертеж.

№	Задание	№	Задание
1	$y=$, $y=0$, $x=9$	6	$y=x+1$, $x=0$, $x=2$, $y=0$
2	$y=2+x$, $x=1$, $x=2$, $y=0$	7	$y=3x$, $x=2$, $y=0$
3	$y=2x$, $x=1$, $x=4$, $y=0$	8	$y=$, $y=0$, $x=1$, $x=4$
4	$y=2-x$, $x=0$, $y=0$	9	$y=2x$, $x=3$, $y=0$
5	$y=x$, $x=5$, $y=0$	10	$y=$, $y=0$, $x=4$

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 17

Тема занятия: Первообразная функции, ее применение. (2 часа)

Содержание темы: научиться вычислять первообразную и разобрать примеры ее применения.

Планируемые образовательные результаты: развиты умение работать с формулами и применять их при решении задач.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка, таблица значений первообразных

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Прочитать теоретический материал

Мы недавно проходили тему «Производные некоторых элементарных функций».

Например:

Производная функции $f(x)=x^9$, мы знаем что $f'(x)=9x^8$. Теперь мы рассмотрим пример нахождения функции, производная которой известна.

Допустим дана производная $f'(x)=6x^5$. Используя знания о производной мы можем определить что это производная функции $f(x)=x^6$.

Функцию которую можно определить по ее производной называют первообразной.

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Пример 1: Найти первообразную функции $f(x) = 4x^3$.

Решение: Используя правило дифференцирования, можно догадаться, что на интервале $(-\infty; +\infty)$ первообразной является $F(x) = x^4$. Действительно, $F'(x) = (x^4)' = 4x^3$ для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

Пример 2: Найти первообразную функции $y = x^6$ на множестве $\mathbb{R}$.

Решение: Степень x^6 получается при дифференцировании x^7 . Так как $(x^7)' = 7x^6$, то, чтобы при дифференцировании x^7 получить перед x^6 коэффициент 1, нужно x^7 взять с коэффициентом $1/7$.

$$- 1^7.$$

Следовательно, $F(x) = x$

7

Пример 3: Докажем что для любого $x \in (-\infty; +\infty)$ функция $F(x) = x^5 - 5x$ является первообразной для функции $f(x) = 5x^4 - 5$.

Доказательство: Используя определение первообразной, найдем производную функции $F(x) = (x^5 - 5x)' = (x^5)' - (5x)' = 5x^4 - 5$.

Мы знаем что нахождение производной называют *дифференцированием*. Нахождение функции по ее производной будем называть *интегрированием*. Целью интегрирования является нахождение всех первообразных данной функции.

Дифференцирование функции – однозначная операция, т.е. если функция имеет производную, то только одну. Это утверждение непосредственно следует из определений предела и производной: если функция имеет предел, то только один. *Обратная операция – отыскание первообразной – не однозначна.*

Так, функции $F_1(x) = x^4, F_2(x) = x^4 + 5, F_3(x) = x^4 - 3, F_4(x) = x^4 + C$, где C – любое постоянное действительное число, являются первообразными функции $f(x) = 4x^3, x \in \mathbb{R}$, поскольку, все эти функции имеют одну и ту же производную $4x^3$.

Теорема: Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X , то множество всех первообразных этой функции определяется формулой $G(x) = F(x) + C$, где C действительное число

Три правила нахождения первообразных

Правило №1: Если F есть первообразная для функции f , а G – первообразная для g , то $F + G$ – есть первообразная для $f + g$.

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f + g$$

Правило №2: Если F – первообразная для f , а k – постоянная, то функция kF – первообразная для kf (kF)' = kF' = kf

Правило №3: Если F – первообразная для f , а k и b – постоянные ($k \neq 0$), то функция

$-F(kx+b)$ - первообразная для $f(kx+b)$
 k

$$\left(\int f(kx+b) dx \right)' = \frac{1}{k} (kx+b)' k = f(kx+b) \quad - \quad F$$

Таблица первообразных

Функция	Первообразная
k	$kx+C$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}, x > 0$	$\ln x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$	$2\sqrt{x} + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx+b)^n, n \neq -1, k \neq 0$	$\frac{(kx+b)^{n+1}}{k(n+1)} + C$
$\frac{1}{kx+b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} \ln(kx+b) + C$
$e^{kx+b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} e^{kx+b} + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\sin(kx+b), k \neq 0$	$-\frac{1}{k} \cos(kx+b) + \frac{C}{k}$
$\cos(kx+b), k \neq 0$	$\frac{1}{k} \sin(kx+b) + C$

Практическая часть

Пример 1. Найдем первообразную для функции $f(x) = 3x^2 + \sin x$.

Решение: Мы знаем, что первообразной для $3x^2$ является x^3 . Первообразной для $\sin x$ является $-\cos x$.

Складываем два первообразных и получаем первообразную для заданной функции:

$$F(x) = x^3 + (-\cos x) = x^3 - \cos x.$$

Ответ: для функции $f(x) = 3x^2 + \sin x$ первообразной является функция $F(x) = x^3 - \cos x$.

Пример 2. Найдем первообразную для функции $f(x) = 2 \sin x$.

Решение: Замечаем, что $k = 2$. Первообразной для $\sin x$ является $-\cos x$. Следовательно, для функции $y = 2 \sin x$ первообразной является функция $F(x) = -2 \cos x$.

Коэффициент 2 в функции $f(x) = 2 \sin x$ соответствует коэффициенту первообразной, от которой эта функция образовалась.

Ответ: для функции $f(x) = 2 \sin x$ первообразной является функция $F(x) = -2 \cos x$.

Пример 3. Найдем первообразную для функции $f(x) = x^2 + 5x^4$

Решение: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 5 \frac{x^5}{5} = \frac{x^3}{3} + x^5.$

Пример 4. Найдем первообразную для функции $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

Решение: $F(x) = 1 \cdot x + \ln x.$

Пример 5. Найдем первообразную для функции $f(x) = (3x - 2)^7$.

Решение: $F(x) = \frac{(3x-2)^{7+1}}{3(7+1)} = \frac{(3x-2)^8}{24}.$

Пример 6. Найдем первообразную для функции $f(x) = 7\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$.

Решение: Преобразуем данную функцию, от корня перейдем к степени с рациональным показателем

$$f(x) = 7\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 7x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}.$$

$$F(x) = 7 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} = 7 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} = \frac{14x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5}.$$

Тогда первообразная F

Пример 7. Для функции $f(x) = 2x$ найти первообразную, график которой проходит через т. М (1;4)

Решение: Найдем $F(x) = x^2 + C$ – множество всех первообразных. Эта функция должна проходить через точку М (1;4). Что значит, что она проходит через точку? Это значит, что если вместо x поставить везде 1, а вместо $F(x)$ – 4, то мы должны получить верное числовое равенство. Давайте так и сделаем: Следовательно, $4 = 1^2 + C$

$$C = 3.$$

Значит, $F(x) = x^2 + 3.$

Задание 2: для самостоятельной работы

1. Является ли функция $F(x)=x^3+3x-1$ первообразной для функции $f(x)=3(x^3+1)$?
2. Найдите все первообразные функции:
 - а). $f(x)=x^4-2x^2-12$;
 - б). $f(x)=3\sin x-4\cos x$;
 - в). $f(x)=\cos(3x+2)$;
 - г). $f(x)=(x+7)^3$.
3. Для функции $f(x)=2x^2+3$ найдите ту первообразную, график которой проходит через точку $M(-2;-5)$.

Задание 3:

Вариант 1

1. Докажите, что функция F является первообразной для функции f на $\mathbb{R}$:
$$F(x) = x^2 - \sin 2x - 1;$$
$$f(x) = 2x - 2 \cos 2x$$
2. Найдите общий вид первообразных для функции:
 - а). $f(x) = x^2 - \sin x$;
 - б). $f(x) = 4 - \frac{2}{x^3}$
3. Для функции f найдите первообразную F , принимающую заданное значение в указанной точке:
 - а). $f(x) = (x-8)^3, F(8) = 1$;
 - б). $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}, F(9) = 9$

Вариант 2

1. Докажите, что функция F является первообразной для функции f на $\mathbb{R}$:
$$F(x) = -\cos \frac{x}{2} - x^3 + 4;$$
$$f(x) = \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{3x^2}$$
2. Найдите общий вид первообразных для функции:
 - а). $f(x) = 4x^3 + \cos x$;

$$б). f(x) = \frac{1}{x^4} - 3$$

3. Для функции f найдите первообразную F , принимающую заданное значение в указанной точке:

$$а). f(x) = (x + 4)^2, F(-4) = 3;$$

$$б). f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, F(4) = 4$$

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 18

Тема занятия: Решение иррациональных уравнений и неравенств (6часов)

Содержание темы: научиться решать иррациональные уравнения и неравенства

Планируемые образовательные результаты: умения решать иррациональные уравнения и неравенства

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Изучить теоретический материал

Весьма распространенный прием решения иррациональных уравнений и неравенств – возведение в квадрат. Тем не менее советуем вам пользоваться им как можно реже, ибо он обладает существенными недостатками: во-первых, возводя в квадрат обе части уравнения, вы расширяете область допустимых значений неизвестного, что может привести к появлению посторонних корней; во-вторых, часто в результате этой операции получается уравнение с громоздкими коэффициентами, работать с которыми затруднительно (особенно если на экзамене не разрешается пользоваться калькулятором). Наконец, главный недостаток этого приема – увеличение вдвое степени уравнения. Возведя обе части в квадрат, вы можете избавиться от иррациональностей, но получить рациональное уравнение степени выше второй, способы решения которого в общем виде вам неизвестны или вообще не существуют.

Если возводить в квадрат все-таки приходится, нужно внимательно следить за тем, чтобы не включить в ответ посторонние корни. В частности, если уравнение имеет вид $\sqrt{f(x)} = g(x)$, то для корней должно выполняться условие $g(x) \geq 0$ (при этом $f(x) = g^2(x) \geq 0$, и условие $f(x) \geq 0$ отдельно ставить не требуется). Еще один способ обнаружить посторонние корни – проверка всех найденных корней подстановкой из в первоначальное уравнение.

Пример 1. $\sqrt{x^2 + 4x - 5} = 4x - 8$.

Корни должны удовлетворять условию $4x - 8 \geq 0$, то есть $x \geq 2$. Возведем обе части в квадрат: $x^2 + 4x - 5 = 16x^2 - 64x + 64$, $15x^2 - 68x + 69 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{23}{15} < 2$ - посторонний корень.

Ответ: $x = 3$.

Замена переменной очень полезна при решении иррациональных уравнений. Часто с ее помощью удается избежать необходимости возведения в квадрат.

Пример 2. $2\sqrt{x^2 - 7x + 19} + x^2 - 7x + 4 = 0$.

Поскольку неизвестное входит в подкоренное выражение и в рациональную часть уравнения в виде одной и той же комбинации $(x^2 - 7x)$, можно сделать замену: $t = \sqrt{x^2 - 7x + 19}$ ($t \geq 0$), тогда $x^2 - 7x = t^2 - 19$, и t определяется из уравнения: $2t + t^2 - 19 + 4 = 0$, $t^2 + 2t - 15 = 0$, $t_1 = 3$, $t_2 = -5 < 0$ – не соответствует условию на знак t .

Обратная замена: $\sqrt{x^2 - 7x + 19} = 3$, $x^2 - 7x + 19 = 9$, $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

Ответ: $x = 2, x = 5$.

Пример 3. $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + 4\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} = 5$.

Подкоренные выражения – взаимно обратные дроби, поэтому замена $t = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ ($t \geq 0$) приводит к уравнению $t + \frac{4}{t} = 5$, $t^2 - 5t + 4 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

А) $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} = 1$, $\frac{x+1}{1-x} = 1$, $x+1 = 1-x$, $x = 0$.

Б) $\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} = 4$, $\frac{x+1}{1-x} = 16$, $x+1 = 16-16x$, $x = \frac{15}{17}$.

Ответ: $x = 0$, $x = \frac{15}{17}$.

Обращаем ваше внимание на то, что в этих двух заданиях не было необходимости в проверке корней или задании каких-либо ограничений: значения x определялись из условия, что корень принимает некоторое неотрицательное значение.

Пример 4. $\sqrt{x} + \sqrt{x-16} = \sqrt{32-x}$.

Перепишем уравнение в виде: $\sqrt{x-16} = \sqrt{32-x} - \sqrt{x}$ и возведем обе части в квадрат, не задавая никаких ограничений: проще будет в конце работы проверить получившиеся корни.

$$x-16 = (\sqrt{32-x} - \sqrt{x})^2, \quad x-16 = 32-x-2\sqrt{32x-x^2}+x, \quad 2\sqrt{32x-x^2} = 48-x.$$

Еще раз возведем в квадрат обе части полученного равенства:

$$4(32x-x^2) = 2304-96x+x^2, \quad 5x^2-224x+2304=0, \quad x_1=16, \quad x_2=\frac{144}{5}.$$

Проверка:

А) $x = 16$: $\sqrt{16} + \sqrt{16-16} = 4$; $\sqrt{32-16} = 4$ – $x = 16$ – корень уравнения.

Б) $x = \frac{144}{5}$: $\sqrt{\frac{144}{5}} + \sqrt{\frac{144}{5}-16} = \frac{12}{\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}}$; $\sqrt{32-\frac{144}{5}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \neq \frac{20}{\sqrt{5}}$ –

$x = \frac{144}{5}$ – не корень уравнения.

Ответ: $x = 16$.

Пример 5. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-4} = 2$.

В этом уравнении замена $t = \sqrt{x-4}$ ($t \geq 0$) поможет ограничиться только одним возведением в

квадрат: $x = t^2 + 4$; $\sqrt{t^2+1} + t = 2$, $\sqrt{t^2+1} = 2-t$, $\begin{cases} t^2+1 = 4-4t+t^2, \\ 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$,

$$4t = 3, \quad t = \frac{3}{4}, \quad x = \frac{9}{16} + 4 = \frac{73}{16}.$$

Ответ: $x = \frac{73}{16}$.

Рассмотрим еще одну группу иррациональных уравнений, которые решаются с помощью разложения на множители.

Пример 6. $(x+6)\sqrt{36+10x-x^2} = x^2 - 36$.

ОДЗ задается условием: $36+10x-x^2 \geq 0$, $5-\sqrt{61} \leq x \leq 5+\sqrt{61}$. Запишем уравнение в виде:
 $(x+6)\sqrt{36+10x-x^2} = (x-6)(x+6)$, $(x+6)(\sqrt{36+10x-x^2} - (x-6)) = 0$.

А) $x+6=0$, $x=-6 < 5-\sqrt{61}$ – посторонний корень.

Б) $\sqrt{36+10x-x^2} - (x-6) = 0$, $\sqrt{36+10x-x^2} = x-6$,
$$\begin{cases} 36+10x-x^2 = x^2-12x+36 \\ x-6 \geq 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2-11x=0 \\ x \geq 6 \end{cases}, x=11$$
 (корень первого уравнения $x=0$ не удовлетворяет второму условию). Итак,

единственный корень исходного уравнения – $x=11$.

Ответ: $x=11$.

Нередко в иррациональных уравнениях присутствуют и модули. В этом случае при решении нужно использовать приемы работы и с иррациональными, и с модульными уравнениями.

Пример 7. $|\sqrt{x}-3| = x-\sqrt{x}-1$.

Сделаем замену: $t=\sqrt{x}$ ($t \geq 0$) и получим для t уравнение $|t-3| = t^2-t-1$.

А) $t \geq 3$, $t-3 = t^2-t-1$, $t^2-2t+2=0$, $D < 0$ – решений нет.

Б) $t < 3$, $-t+3 = t^2-t-1$, $t^2=4$, $t_1=2$, $t_2=-2 < 0$ – посторонний корень.

Итак, $\sqrt{x}=2$, $x=4$.

Ответ: $x=4$.

Перейдем к решению иррациональных неравенств. Если применять возведение в квадрат, то неравенство преобразуется в систему (или несколько систем) рациональных неравенств, в которые входят все необходимые ограничения.

Пример 9. $\sqrt{x^2-4x-140} \leq 4x-72$.

Вспомним свойства неравенств: если обе части неравенства неотрицательны, то при возведении в квадрат знак неравенства не меняется; если отрицательны, то знак меняется на противоположный; если же левая и правая части имеют разные знаки, то возведение в квадрат является некорректной операцией.

В данном неравенстве подкоренное выражение, разумеется, должно быть неотрицательным. Кроме того, значения правой части не меньше квадратного корня, то есть для решений неравенства правая часть может быть только неотрицательной. При выполнении этих условий мы имеем право возвести обе части в квадрат с сохранением знака неравенства:

$$\begin{cases} x^2-4x-140 \geq 0 \\ 4x-72 \geq 0 \\ x^2-4x-140 \leq 16x^2-576x+5184 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -10, x \geq 14 \\ x \geq 18 \\ 15x^2-572x+5324 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -10, x \geq 14 \\ x \geq 18 \\ x \leq 16\frac{2}{15}, x \geq 22 \end{cases}.$$

Пересечение решений можно записать в виде: $x \geq 22$.

Ответ: $[22; +\infty)$.

Пример 10. $\sqrt{x^2+6x-7} > 2x-1$.

В этом неравенстве, в отличие от предыдущего, правая часть может принимать значения разных знаков. Рассмотрим эти случаи отдельно:

А) Если выполнены условия $\begin{cases} x^2 + 6x - 7 \geq 0 \\ 2x - 1 < 0 \end{cases}$, то неравенство будет верным: действительно, любое неотрицательное число больше любого отрицательного числа. Следовательно, все решения этой системы войдут в ответ. Решим полученную систему неравенств: $\begin{cases} x \leq -7, x \geq 1 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \leq -7.$

Б) Вторая возможность – выполнение условий $\begin{cases} x^2 + 6x - 7 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 6x - 7 > 4x^2 - 4x + 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \leq -7, x \geq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 10x + 8 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -7, x \geq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} < x < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} < x < 2.$$

Ответ: $(-\infty; -7] \cup \left(\frac{4}{3}; 2\right).$

В иррациональных неравенствах, как и в уравнениях, полезно использовать замену переменной.

Пример 11. $3\sqrt{x^2 - 17x + 16} > x^2 - 17x + 12.$

Пусть $t = \sqrt{x^2 - 17x + 16}$, тогда значения t определяются системой неравенств:

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ 3t > t^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 3t - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ -1 < t < 4 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t < 4.$$

После обратной замены получим: $0 \leq \sqrt{x^2 - 17x + 16} < 4$. Поскольку левая и правая части этого двойного неравенства неотрицательны, мы можем возвести все три части в квадрат:

$$0 \leq x^2 - 17x + 16 < 16, \begin{cases} x^2 - 17x + 16 \geq 0 \\ x^2 - 17x + 16 < 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1, x \geq 16 \\ 0 < x < 17 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq 1, 16 \leq x < 17.$$

Ответ: $(0; 1] \cup [16; 17).$

Если корень четной степени входит в нестрогое неравенство в качестве множителя, то, чтобы избежать потери решений, лучше рассмотреть отдельно случай равенства и строгого неравенства.

Пример 12. $\frac{\sqrt{9x - 8 - x^2}}{x^2 - 3x - 4} \leq 0.$

А) $\frac{\sqrt{9x - 8 - x^2}}{x^2 - 3x - 4} = 0, 9x - 8 - x^2 = 0, x_1 = 1, x_2 = 8.$

Б) $\frac{\sqrt{9x - 8 - x^2}}{x^2 - 3x - 4} < 0.$ Поскольку числитель дроби при всех допустимых значениях x неотрицателен,

знаменатель должен принимать отрицательные значения, и неравенство сводится к системе:

$$\begin{cases} 9x - 8 - x^2 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1, x > 8 \\ -1 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 4.$$

Объединяя найденные решения, получим окончательный ответ: $1 \leq x < 4, x = 8.$

Еще раз обратите внимание на то, что если бы мы не рассматривали случай равенства отдельно, а решали систему неравенств $\begin{cases} 9x - 8 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases}$, то потеряли бы решение $x = 8$.

Ответ: $[1; 4)$, $x = 8$.

Задание 2. Выполните решение уравнений и неравенств

1. $\sqrt{x^2 + x - 5} + \sqrt{x^2 + x + 10} = 5$
2. $\sqrt{5x - 19} + \sqrt{5x - 16} - 3\sqrt{2x - 7} = 0$
3. $\sqrt{\frac{x-2}{x-5}} - 24\sqrt{\frac{x-5}{x-2}} = 2$
4. $\sqrt{x^2 + 9x - 25} = \sqrt{5x + 7}$
5. $(x^2 - 6x)\sqrt{3 - x} = x(x^2 - 9x + 8)$
6. $5\sqrt{x} = 16 - |x - 10|$
7. $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-9}}} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{x-9}}} = \frac{\sqrt{x-9}}{6}$
8. $\frac{\sqrt{6x+5}}{10x+5} \leq \frac{\sqrt{6x+5}}{5-x}$
9. $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-27} < 7$
10. $(x-7)\sqrt{x^2 - 7x + 6} < 49 - 7x$

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 19

Тема занятия: Решение задач «Показательная функция» (2 часа)

Содержание темы: закрепить знания и умения студентов по освоению свойств показательной функции.

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Прочитать теоретический материал

Свойства показательной функции

Определение. Функция, заданная формулой $y=a^x$ (где $a>0$, $a\neq 1$), называется показательной функцией с основанием a . Сформулируем основные свойства показательной функции (их доказательство выходит за рамки школьного курса). 1. Область определения – множество $\mathbb{R}$ действительных чисел. 2. Область значений – множество $\mathbb{R}_+$ всех положительных действительных чисел. 3. При $a > 1$ функция возрастает на всей числовой прямой; при $0 < a < 1$ функция убывает на множестве $\mathbb{R}$.

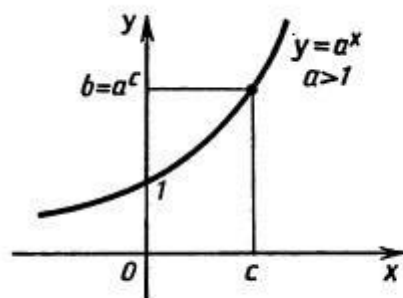


Рис. 1

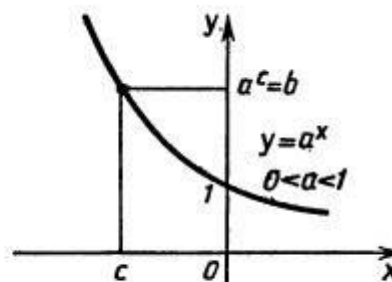


Рис. 2

Графики показательных функций для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$ изображены на рисунках 1-2.
Задание 2. Выполнить задания

1. Укажите наименьшее целое значение функции $y = 4^{2-x} - 3$
2. Определите множество значений функции: $y = 8 - |0,5|^{|x|}$
3. Укажите наибольшее целое значение функции $y = 5 - 7^{2+x}$
4. Определите множество значений функции: $y = \frac{8}{2^{4x} + 1}$
5. Укажите наименьшее целое значение функции $y = 5^{2x} - 4$
6. Определите множество значений функции: $y = 4 - 2^{4x}$
7. Укажите наибольшее целое значение функции $y = 1 - 8^{3x}$
8. Определите множество значений функции: $y = \frac{12}{5^{|x|} + 3}$

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 20

Тема занятия: Решение показательных уравнений и неравенств (8 часа)

Содержание темы: сформировать умения и навыки решения различных показательных уравнений и неравенств.

Планируемые образовательные результаты:

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение:

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Рассмотрите решение показательных уравнений:

$$1. 3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x = 21$$

Используя свойства показательной функции $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, преобразуем уравнение,

$$3^x \cdot 3^2 - 3^x \cdot 3^1 + 3^x = 21$$

Вынесем общий множитель 3^x за скобки:

$$3^x(9 - 3 + 1) = 21$$

$$3^x \cdot 7 = 21$$

$$3^x = 3$$

$$x = 1$$

Ответ. 1

2. Решим уравнение:

$$3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$$

Вынесем общий множитель 3^{x-2} за скобки, получаем

$$3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$$

$$3^{x-2} \cdot 25 = 25$$

$$3^{x-2} = 1$$

$$3^{x-2} = 3^0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Ответ. 2

3. Решим уравнение.

$$3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}$$

Запишем уравнение в виде

$$3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-2} = 5^x - 2 \cdot 5^{x-2}$$

В левой и правой частях уравнения вынесем общие множители

$$2^{x-2}(3 \cdot 2^3 - 1) = 5^{x-2}(5^2 - 2)$$

$$2^{x-2} \cdot 23 = 5^{x-2} \cdot 23$$

Так как $5^{x-2} \neq 0$, то разделив обе части уравнения на $5^{x-2} > 0$, получим

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Ответ. 2

4. Решим уравнение.

$$9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

Сделаем замену переменной $t = 3^x$, так как $E(a^x) = (0; +\infty)$, то $t > 0$. Заметим, что $9^x = (3^x)^2 = t^2$

Поэтому данное уравнение принимает вид:

$$t^2 - 4t - 45 = 0$$

По обратной теореме Виета найдем корни уравнения:

$$t_1 = -5 \text{ и } t_2 = 9$$

$$t_1 = -5 - \text{посторонний корень}$$

Откуда получаем

$$3^x = 9$$

$$x = 2$$

Ответ. 2

Задание 2. Работа с учебником стр.231 №463 (в, г), №464 (в, г), № 468 (в, г).

Задание 3. Решите неравенства

1. Решите неравенство $49 \cdot 7^x < 7^{3x+3}$.

2. Решите неравенство $25 \cdot 5^x - 5^{2x+3} > 0$.

3. Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-7} > 0,04$.
4. Решите неравенство $4^{x+1} + 4^{x+2} \leq 5$.
5. Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} \geq 4$.
6. Решите неравенство $0,2 \cdot 2^{x-4} \geq 0,4$.
7. Решите неравенство $3^{5-3x} - 1 \geq 0$.
8. Решите неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{2+3x} - 2 > -1$.
9. Решите неравенство $\left(\frac{7}{8}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{8}{7}\right)^{3-2x}$.
10. Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} + 2^x \geq 6$.

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 21

Тема занятия: Решение задач «Логарифмы. Логарифмическая функция» (2 часа)

Содержание темы: Обеспечить закрепление понятий: логарифм числа, десятичный и натуральный логарифм; формировать умения и навыки применения свойств логарифма к решению задач.

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Контрольные вопросы.

1. Понятие логарифма числа.
2. Основное логарифмическое тождество.
3. Понятие десятичного логарифма числа.
4. Понятие натурального логарифма числа.
5. Основные свойства логарифмов.
6. Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Пример 1. Вычислить. $49^{0,5 \log_7 9}$

Решение. $49^{0,5 \log_7 9} = (7^2)^{0,5 \log_7 9} = 7^{2 \cdot 0,5 \log_7 9} = 7^{\log_7 9} = 9$

Пример 2. Вычислить.

а) $\log_3 15 - \log_3 5 + 3^{\log_3 5}$

Решение. $\log_3 15 - \log_3 5 + 3^{\log_3 5} = \log_3 \frac{15}{5} + 5 = \log_3 3 + 5 = 1 + 5 = 6$

б) $\log_3 36 - 2 \log_3 2 + \log_2 \frac{1}{4}$

Решение.

$$\log_3 36 - 2 \log_3 2 + \log_2 \frac{1}{4} = \log_3 36 - \log_3 2^2 + \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \log_3 \frac{36}{4} + \log_2 2^{-2} = \log_3 9 - 2 = 2 - 2 = 0$$

Пример 3. Упростить выражение. $3^{\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 5} + \log_4 \sqrt[5]{16}$

Решение.

$$3^{\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 5} + \lg \sqrt[5]{100} = 3^{\log_2 2^{-2}} \cdot 3^{\log_3 5} + \frac{1}{5} \lg 100 = 3^{-2} \cdot 5 + \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{1}{9} \cdot 5 + \frac{2}{5} = \frac{25+18}{45} = \frac{43}{45}$$

$$\frac{\log_3 216}{\log_8 3} - \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3}$$

Пример 4. Вычислить.

Решение.

$$\frac{\log_3 216}{\log_8 3} - \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} = \frac{\log_3 216}{\frac{\log_3 3}{\log_3 8}} - \frac{\log_3 24}{\frac{\log_3 3}{\log_3 72}} = \frac{\log_3 216}{1} \cdot \frac{\log_3 8}{\log_3 3} - \frac{\log_3 24}{1} \cdot \frac{\log_3 72}{\log_3 3} = \log_3 216 \cdot \log_3 8 - \log_3 24 \cdot \log_3 72 =$$

$$= \log_3 (72 \cdot 3) \cdot \log_3 8 - \log_3 (8 \cdot 3) \cdot \log_3 72 = (\log_3 72 + \log_3 3) \log_3 8 - (\log_3 8 + \log_3 3) \log_3 72 =$$

$$= (\log_3 72 + 1) \log_3 8 - (\log_3 8 + 1) \log_3 72 = \log_3 72 \cdot \log_3 8 + \log_3 8 - \log_3 72 \cdot \log_3 8 - \log_3 72 =$$

$$= \log_3 8 - \log_3 72 = \log_3 \frac{8}{72} = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$$

Пример 5. Решить уравнение. $\log_6 x = 2 \log_6 3 + 4 \log_{36} 2$

Решение.

$$\log_6 x = 2 \log_6 3 + 4 \log_{36} 2$$

$$\log_6 x = \log_6 3^2 + \log_{6^2} 2^4$$

$$\log_6 x = \log_6 9 + \frac{1}{2} \log_6 16$$

$$\log_6 x = \log_6 9 + \log_6 16^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_6 x = \log_6 (9 \cdot 4)$$

$$\log_6 x = \log_6 36$$

$$\log_6 x = 2$$

$$x = 6^2$$

$$x = 36$$

Выполнить следующие задания.

Задание 1. Вычислить.

1. $16^{\log_2 3}$
2. $2^{\log_2 3} + \log_7 2 - \log_7 14$
3. $\log_2 50 - 2 \log_2 5 + \log_5 \sqrt{5}$

Задание 3. Упростить выражение

1. $9^{\log_3 2 + \log_5 \frac{1}{25}} + 2^{\log_2 7} \log_9 \sqrt[7]{81}$
2. $\left(\frac{\log_{100} a}{b^{\lg a}} \cdot \frac{\log_{100} b}{a^{\lg b}} \right)^{2 \log_{ab} (a+b)}$

Задание 4. Вычислить

$$\frac{\log_2 192}{\log_{12} 2} - \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2}$$

Задание 5. Решить уравнение

$$\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$$

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 22

Тема занятия: Решение логарифмических уравнений и неравенств (8 часа)

Содержание темы: изучить способы решения логарифмических уравнений и неравенств, закрепить их при выполнении упражнений.

Планируемые образовательные результаты: научиться применять определение и свойства логарифма в решении логарифмических уравнений и неравенств

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Решение логарифмических неравенств (4 часа)

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Разобрать примеры решения уравнений

1. Решение уравнений на основании определения логарифма.

$\log_a x = c$ ($a > 0, a \neq 1$) имеет решение $x = a^c$.

На основе определения логарифма решаются уравнения, в которых:

- по данным основаниям и числу определяется логарифм,
- по данному логарифму и основанию определяется число,
- по данному числу и логарифму определяется основание.

Пример 1

$$\log_2 128 = x$$

$$2^x = 128$$

$$2^x = 2^7$$

$$x = 7$$

Ответ: 7

Пример 2

$$\log_{16} x = \frac{3}{4}$$

$$x = 16^{\frac{3}{4}}$$

$$x = (2^4)^{\frac{3}{4}}$$

$$x = 2^3$$

$$x = 8$$

Ответ: 8

Пример 3

$$\log_x 27 = 3$$

$$x^3 = 27$$

$$x^3 = 3^3$$

$$x = 3$$

Ответ: 3

2. Метод потенцирования.

Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их т.е. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, то $f(x) = g(x)$, при условии, что $f(x) > 0, g(x) > 0, a > 0, a \neq 1$.

Пример: Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 1) = \log_{\frac{1}{2}}(6x + 8)$

$$3x - 1 = 6x + 8$$

$$-3x = 9$$

$$x = -3$$

$$-3 > \frac{1}{3} - \text{неверно}$$

Ответ: решений нет.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ 6x + 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > -\frac{8}{6} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$

3. Уравнения, решаемые с помощью применения основного логарифмического тождества.

Пример: Решите уравнение $x^{\log_x \log_2 x^2} = \log_2(6 - x)$

$$\log_2 x^2 = \log_2(6 - x)$$

ОДЗ:

$$x^2 = 6 - x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = -3 - \text{не принадлежит ОДЗ}$$

$$x = 2 - \text{принадлежит ОДЗ}$$

Ответ: $x=2$

$$\begin{cases} 6-x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ \log_2 x^2 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 6 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 1) \cup (1; 6)$$

4. Метод приведения логарифмов к одному и тому же основанию.

Пример: Решите уравнение $\log_{16}x + \log_4x + \log_2x = 7$

$$\log_{2^4}x + \log_{2^2}x + \log_2x = 7 \quad \text{ОДЗ:}$$

$$\frac{1}{4}\log_2x + \frac{1}{2}\log_2x + \log_2x = 7 \quad x > 0$$

$$\log_2x \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right) = 7$$

$$\frac{7}{4}\log_2x = 7$$

$$\log_2x = 4$$

$$x = 2^4$$

$x = 16$ – принадлежит ОДЗ

Ответ: $x = 16$.

Задание 2. Решите уравнения

$$\log_2(7 - 8x) = 2$$

$$\lg(x^2 - 2) = \lg x$$

$$\log_3x + \log_5x = 3$$

$$2^{\log_2 7^x} = 3^{\log_3(6+7^{x-1})}$$

Задание 3. Работа с учебником

№№513(а, б), 514(а, б), 515(а, б), 518(а, б), 519(а, б)

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Решение логарифмических неравенств (4 часа)

Задание 1. Решить неравенства

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(1 - x) \leq 1$

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{5}}(2 - x) < -1$

Решите неравенство $\log_{\sqrt{2}}(x + 2) > 2$

Решите неравенство $\log_{\sqrt{7}}(3x - 1) \leq 2$

Решите неравенство $\log_{\frac{2}{3}}(x + 3) \geq 1$

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{25}}(3x) > \frac{1}{2}$

Решите неравенство $\log_{\sqrt[3]{3}}(-x - 1) > 3$

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(1 - x) > 2$

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2^{2/3}}}(2 - 4x) > 3$

Решите неравенство $\log_{\sqrt[3]{2}}(3x + 2) \leq 3$

Решите неравенство $\log_{16}(3x - 3) > \frac{1}{2}$

Решите неравенство $\log_9(-2x - 2) \leq -\frac{1}{2}$

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{5}}(-2x) \leq -1$

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 23

Тема занятия: Логарифмы в природе и технике (4* часа)

Содержание темы: научиться применять логарифм при вычислении пропускной способности канала передачи данных.

Планируемые образовательные результаты: При выполнении заданий практической работы необходимо подробно описать ход решения заданий и дать ответ.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Прочитать теоретический материал

Любой *реальный* канал связи подвержен внешним воздействиям, а также в нем могут происходить внутренние процессы, в результате которых искажаются передаваемые сигналы и, следовательно, связанное с ними сообщение. Такие воздействия называются **шумами (помехами)**.

После прохождения сообщения по каналу связи сигналы с помощью приемного преобразователя переводятся в последовательность кодов, которые декодирующим устройством представляются в форме, необходимой приемнику информации. На этапе приема, как и при передаче, преобразователь может быть совмещен с декодирующим устройством (например,

радиоприемник или телевизор) или существовать самостоятельно (например, модем).

Характеристиками любой линии связи являются:

- **скорость передачи данных (V),**
- **пропускная способность канала (C)**
- **степень искажения сообщения в процессе передачи ($\varepsilon > 0$).**

Заметим, что максимальная скорость передачи данных равна пропускной способности канала, т. е.

$$V_{\max} = C \quad (1)$$

Вторая теорема Шеннона: При передаче информации по каналу с шумом всегда имеется способ кодирования, при котором сообщение будет передаваться со сколь угодно высокой достоверностью, если скорость передачи не превышает пропускной способности канала.

Из теоремы следует, что в любых случаях при превышении скорости передачи пропускной способности канала возможна потеря информации.

Смысл данной теоремы в том, что при передаче по реальным каналам можно закодировать сообщение таким образом, что действие шумов не приведет к потере информации. Это достигается за счет повышения избыточности кода (т.е. увеличения длины кодовой цепочки); безусловно, возрастает время передачи, что следует считать платой за надежность.

Для расчета пропускной способности канала передачи данных с шумами используется формула Шеннона-Хартли:

$$C = B \cdot \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad (2)$$

C – пропускная способность канала, **бит/с**

B – ширина полосы пропускания канала, **Гц**

S – мощность сигнала, **Вт**

N – мощность шума, **Вт**

Интервал частот, используемый данным каналом связи для передачи сигналов, называется **шириной полосы пропускания (B)**.

Влияние шумов определяется соотношением мощности сигнала и мощности помех. Из этого соотношения, в частности, видно, что для увеличения пропускной способности канала связи необходимо увеличивать полосу пропускания, либо улучшать отношение мощности сигнала к мощности помех.

Для сравнения мощностей сигналов, передаваемых по системе связи, часто пользуются логарифмическими единицами – **децибелами (дБ)**.

Децибел составляет 1/10 более крупной единицы, названной в честь А. Г. Белла – изобретателя телефона.

Бел (Б) – это десятичный логарифм отношения двух мощностей:

$$1 \text{ Б} = \frac{S}{N}$$

Для практики бел (Б) слишком крупная единица и при расчетах пользуются децибелами (дБ):

$$1 \text{ дБ} = 10 \cdot \lg \frac{S}{N} \quad (3)$$

Отношение сигнал/шум S/N часто задается в децибелах (дБ).

Приведем характеристики некоторых каналов связи:

Вид связи	B , Гц	$\frac{S}{N}$	C , бит/с
Телеграф	120	$\approx 2^6$	640
Телефон	$3 \cdot 10^3$	$\approx 2^{17}$	$5 \cdot 10^4$
Телевидение	$7 \cdot 10^6$	$\approx 2^{17}$	$130 \cdot 10^6$
Компьютерная сеть			до 10^9
Слух человека	$20 \cdot 10^3$		$5 \cdot 10^4$
Глаза человека			$5 \cdot 10^6$

Задания практической работы

Задание 1 Определите пропускную способность некоторого канала связи в зависимости от ширины полосы пропускания и отношения сигнал/шум.

Данные для расчетов представлены в таблице 1

Порядок выполнения задания:

- 1) Найдите пропускную способность канала.
- 2) Определите, каким должно быть отношение сигнал/шум в децибелах, для того, чтобы пропускная способность канала составила 50% от вычисленного значения в пункте 1.

Таблица 1 – Исходные данные

Номер варианта	Границы полосы пропускания		$\frac{S}{N}$, дБ
	B_1 (нижняя граница)	B_2 (верхняя граница)	
1	9,4 кГц	32,8 кГц	38
2	2,5 МГц	37,7 МГц	31
3	0,6 кГц	37,5 кГц	40
4	9,8 МГц	22,1 МГц	35
5	9,1 кГц	24,1 кГц	33
6	3,5 МГц	24,7 МГц	38
7	3,3 кГц	38,5 кГц	39
8	8,2 МГц	21,8 МГц	36
9	7,6 кГц	39,9 кГц	35
10	1,9 МГц	22,5 МГц	39

Задание 2 Какова максимальная скорость передачи данных при передаче двоичного сигнала по каналу с полосой пропускания 2 кГц и шумом 10 дБ?

Задание 3 Какое требуется отношение сигнал/шум для достижения в канале пропускной способности 10 Мбит/сек при ширине полосы 2 МГц?

Дополнительное задание

Задание 4 Оцифрованное телевизионное изображение имеет матрицу 480x640 пикселей, причем цвет каждого пикселя кодируется 16 битами.

Телевизионное изображение передается по каналу с шириной полосы 3,5 МГц и отношением сигнал/шум, равным 35 дБ.

Найдите пропускную способность канала.

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 24

Тема занятия: Операции с множествами (2* часа)

Содержание темы: уметь задавать элементы множества; различать и классифицировать множества, выполнять операции над множествами

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Рассмотрите типовые задания и их решения

Типовое задание 1. Укажите, какое из утверждений правильное:

а) $-0,7 \in \mathbb{Q}$; б) $\sqrt{17} \in \mathbb{R}$; в) $4 \in \mathbb{N}$.

Решение.

Для выполнения первого задания необходимо вспомнить определения натуральных, целых, рациональных и действительных чисел:

Натуральные числа ($\mathbb{N}$) – это числа, которые используются при счете: 1, 2, 3... и т.д. Ноль не является натуральным.

Целые числа ($\mathbb{Z}$) – это натуральные числа, противоположные им и число ноль.

Рациональные числа ($\mathbb{Q}$) – это конечные дроби и бесконечные периодические дроби.

Например, $\frac{2}{5} = 0,4$; $\frac{1}{6} = 0,1(6)$

Все целые числа являются рациональными.

Действительные числа ($\mathbb{R}$) – множество всех рациональных и всех иррациональных чисел.

Значит, а) $-0,7 \in \mathbb{Q}$ – верно; б) $\sqrt{17} \in \mathbb{R}$ – верно; в) $4 \in \mathbb{N}$ – верно.

Типовое задание 2. Выпишите все элементы каждого множества: А – множество дней недели; В – множество цветов светофора; С – множество цифр.

Решение.

Перечислим дни недели: понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье.

Значит $A = \{\text{понедельник; вторник; среда; четверг; пятница; суббота; воскресенье}\}$.

Аналогично составим множества В и С:

$V = \{\text{красный; желтый; зеленый}\}$, $C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Типовое задание 3. Выпишите все элементы множества F , если F – это множество корней уравнения $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Решение.

Множество F задается следующим образом: $F = \{x: x^2 + 4x - 5 = 0\}$.

Чтобы записать элементы этого множества, необходимо решить уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$, т. е. найти его корни:

$$D = 16 - 4 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 = 6^2; \quad x_1 = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad x_2 = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = -5.$$

Значит, $F = \{-5; 1\}$.

Типовое задание 4. Найдите пересечение и объединение множеств А и В, если:

$A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ $B = \{2; 4; 6; 8\}$.

Решение.

Множество А состоит из нечетных чисел первого десятка. Множество В состоит из четных чисел первого десятка. Объединением будут все числа первого десятка:

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

Пересечением множеств А и В является пустое множество, т. к. общих элементов у этих множеств нет, значит $A \cap B = \{\emptyset\}$.

Типовое задание 5. Множество А состоит из всех чисел открытого интервала (1;3), множество В состоит из всех чисел интервала [2;6]. Найти объединение множеств А и В.

Решение.

Объединением $A \cup B$ будут все числа принадлежащие сразу двум интервалам.

На интервале от двух до трех, множества содержат одинаковые числа. Тогда объединение можно записать в виде: $A \cup B = (1;6]$

Задание 2. Выполните задания

1. Укажите знак $\in$ или $\notin$ между числом и обозначением числового множества:

- а) $-72 \in \mathbb{R}$; г) $1,95 \in \mathbb{N}$;
б) $11,8 \in \mathbb{Z}$; д) $-6,8 \in \mathbb{Q}$;
в) $555 \in \mathbb{N}$; е) $\sqrt{225} \in \mathbb{R}$

2. Выпишите все элементы множества А, если А – множество нечетных двузначных натуральных чисел.

3. Запишите множество С общих делителей чисел 50 и 75.

4. Найдите пересечение и объединение множеств А и В, если:

а) $A = \{1; 2; 3; 7; 8\}$, $B = \{-1; 0; 3; 4; 5; 7\}$;

б) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{\alpha, b, \beta, \gamma, \varphi\}$.

5. Найдите объединение и пересечение числовых промежутков:

- а) $(-\infty; 15)$ и $(7; +\infty)$;
б) $(-1; 3)$ и $[-1; +\infty)$;
в) $[0; 2]$ и $(-\infty; -1)$.

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 25

Тема занятия: Решение задач «Применение графов при решении задач» (2* часа)

Содержание темы: показать на конкретных примерах из жизни практическое применение теории графов и наиболее рациональные способы решения задач.

Планируемые образовательные результаты: умение применять графы при решении задач

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Прочитать теоретический материал

Степенью или валентностью вершины p n графа Γ , обозначаемой через d_p , называют число рёбер (дуг), инцидентных этой вершине. Вершина степени 1 называется висячей или концевой. Ребро, инцидентное висячей вершине, называется висячим. Вершина степени 0 называется изолированной. По определению петля при вершине p , добавляет 2 в степень соответствующей вершины.

Маршрут в графе Γ представляет собой конечную чередующуюся последовательность вершин и рёбер. Маршрут называется открытым, если его концевые вершины различны, в противном случае он называется замкнутым. Маршрут называется цепью, если все его рёбра различны. Цепь называется элементарной, если при обходе по какому-нибудь направлению каждая вершина цепи встречается только один раз. Замкнутый маршрут образует цикл. Цикл может быть простым, если он содержит отличные друг от друга рёбра, сложным – в противном случае, элементарным, если при обходе по какому-нибудь направлению каждая вершина цикла встречается только один раз. Очевидно, нет смысла вводить для цепи термин “простая цепь”,

если термин “простой”, как в определении графа и цикла, означает отсутствие повторяющихся рёбер.

Последовательность дуг, при которой конец одной дуги является началом другой, называется путём. Если начальная и конечная точки пути совпадают, образуется контур. Длиной пути (или контура) называют число дуг, которые его образуют. Петля – контур единичной длины. Будем также под длиной пути от одной вершины до другой понимать количество рёбер, входящих в соответствующий маршрут. То есть будем применять термин “длина пути” не только к орграфам. Во всех случаях для орграфов и для неориентированных графов дуги и рёбра будем считать столько раз, сколько раз они входят в путь или маршрут.

Дерево — это связный ациклический граф. Связность означает наличие путей между любой парой вершин, ацикличность — отсутствие циклов и то, что между парами вершин имеется только по одному пути.

Лес - упорядоченное множество упорядоченных деревьев.

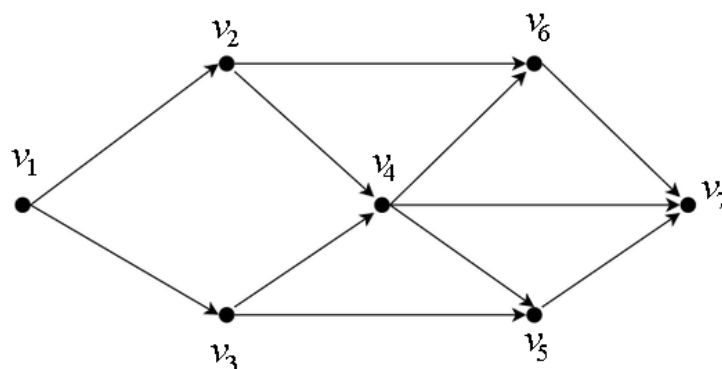
Эйлеров цикл — это цикл графа, проходящий через каждое ребро (дугу) графа ровно по одному разу

Планарный граф — граф, который может быть изображён на плоскости без пересечения рёбер. Иначе говоря, граф планарен, если он изоморфен некоторому плоскому графу, т.е. графу, изображённому на плоскости так, что его вершины — это точки плоскости, а рёбра — кривые на ней. Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его гранями.

Граф G наз. плоским, если он может быть изображен на плоскости так, что вершинам соответствуют различные точки плоскости, а линии, соответствующие ребрам (исключая их концевые точки), не проходят через точки, соответствующие вершинам, и не пересекаются.

Задание 2. Решите следующие задачи:

Задача 1.



Найти все пути из V_4 в V_7 в графе $G=(V, \Gamma)$ изображенном на рисунке.

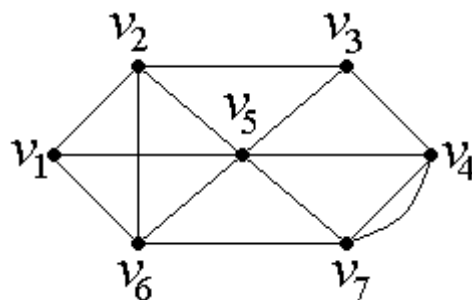
Задача 2.

На пришкольном участке растут 8 деревьев: яблоня, тополь, береза, рябина, дуб, клен, лиственница и сосна. Рябина выше лиственницы, яблоня выше клена, дуб ниже березы, но выше сосны, сосна выше рябины, береза ниже тополя, а лиственница выше яблони. Расположите деревья от самого низкого к самому высокому.

Задача 3.

У Наташи есть 2 конверта: обычный и авиа, и 3 марки: прямоугольная, квадратная и треугольная. Сколькими способами Наташа может выбрать конверт и марку, чтобы отправить письмо?

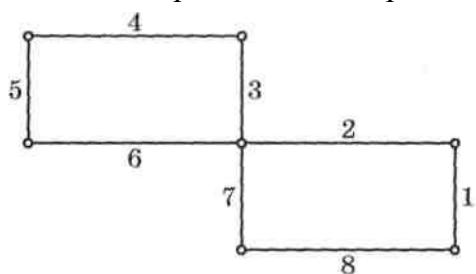
Задача 4.



Найдите Эйлерову цепь в неориентированном графе G.

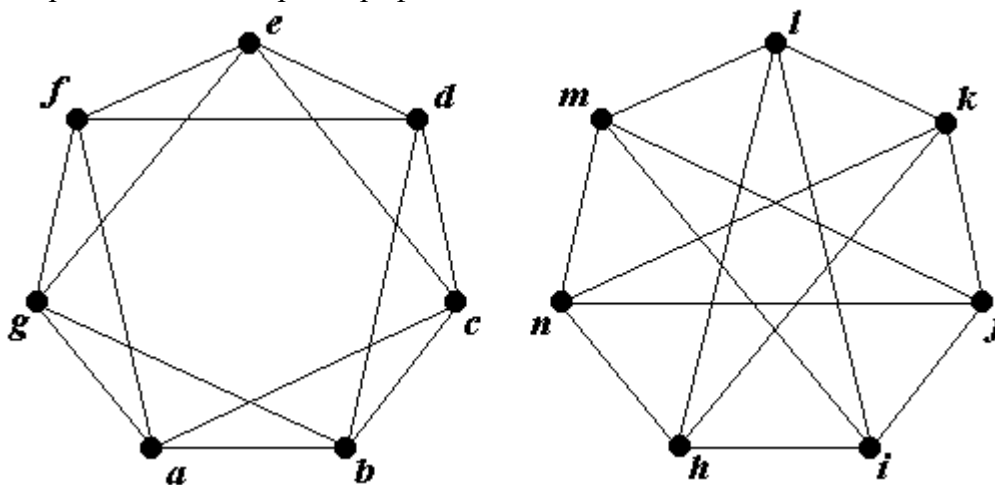
Задача 5.

Найдите эйлеров цикл в эйлеровом графе.



Задача 6.

Постройте эйлеров цикл для второго графа



Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 26

Тема занятия: Решение задач «Составление таблиц и диаграмм на практике» (4* часа)

Содержание темы: показать на конкретных примерах из жизни практическое применение таблиц и диаграмм.

Планируемые образовательные результаты: закрепить на практике умения строить и редактировать таблицы и диаграммы.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

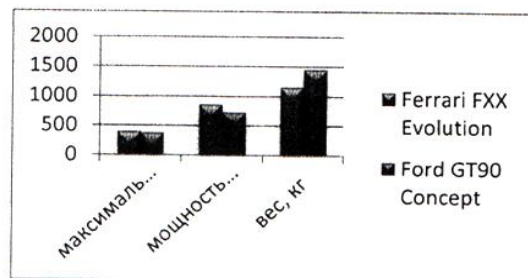
Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1.

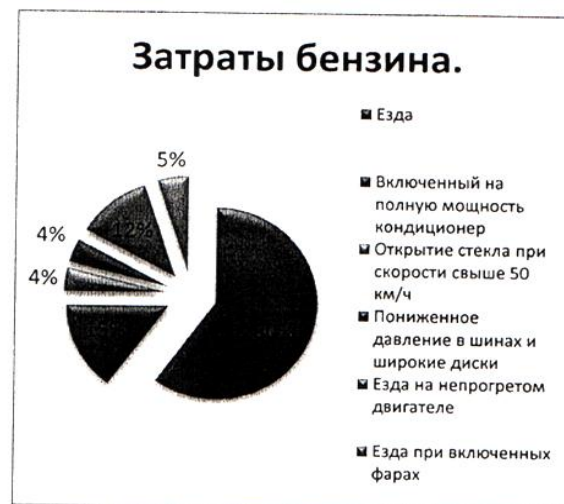
1. Построить гистограмму для сравнения характеристик автомобилей.

	максимальная скорость км/ч	мощность двигателя л.с	вес, кг
Ferrari FXX Evolution	400	860	1155
Ford GT90 Concept	378	730	1451



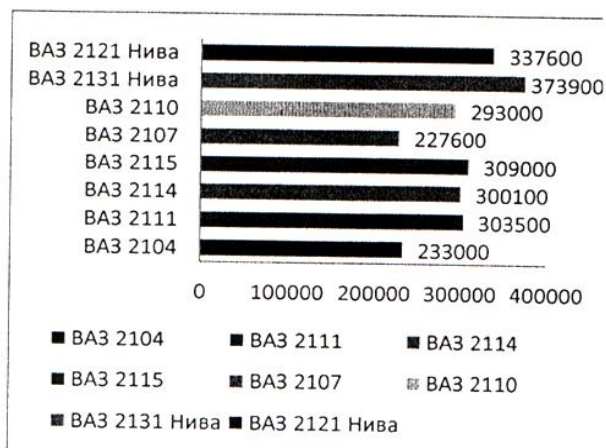
2. Постройте круговую диаграмму, которая покажет затраты бензина автомобилем.

Наименование	Затраты (в %)
Езда	60
Включенный на полную мощность кондиционер	15
Открытие стекла при скорости свыше 50 км/ч	4
Пониженное давление в шинах и широкие диски	4
Езда на непрогретом двигателе	12
Езда при включенных фарах	5



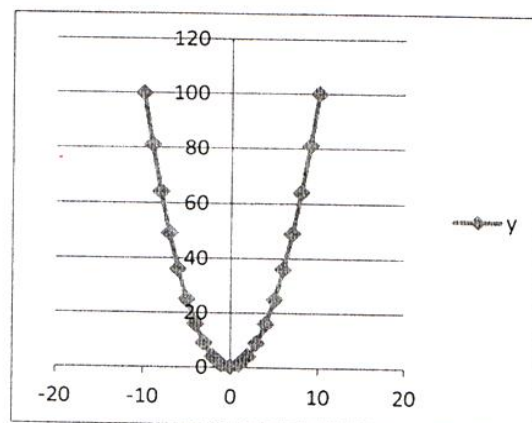
3. Постройте линейчатую диаграмму, показывающую стоимость Автомобилей ВАЗ в 2011 году.

Наименование автомобиля	Стоимость в 2011 году (руб.)
ВАЗ 2104	233000
ВАЗ 2111	303500
ВАЗ 2114	300100
ВАЗ 2115	309000
ВАЗ 2107	227600
ВАЗ 2110	293000
ВАЗ 2131 Нива	373900
ВАЗ 2121 Нива	337600



4. Построить график функции $Y=X^2$ на отрезке $[-10;10]$.

x	y
-10	100
-9	81
-8	64
-7	49
-6	36
-5	25
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



Задание 2. Составить таблицу расчета доходов фирмы и диаграмму роста доходов на основе данных.

Рост уровня доходов фирмы в абсолютном и процентном отношении

Месяцы	Уровень доходов фирмы в 1998 году, млн.руб.	Уровень доходов фирмы в 1999 году, млн.руб.	Рост уровня доходов фирмы в 1999 году млн.руб
январь	180	200	
февраль	195	210	
март	200	230	
апрель	213	245	
май	240	270	
июнь	254	275	
июль	260	281	
август	265	290	
сентябрь	280	300	
октябрь	290	315	
ноябрь	300	323	
декабрь	325	330	
Всего:			

Выполнение.

1. Составить таблицу расчета доходов фирмы: определить тип, размер и стиль шрифтов для заголовков строк и столбцов: Times New Roman, размер 12,; для остального текста - Times New Roman, размер 10;
2. Вычислить рост уровня доходов фирмы.
3. Вычислить суммарный уровень доходов фирмы за 1999 и 1998 годы, результаты поместить в последней строке второго и третьего столбца соответственно;
4. Построить диаграмму зависимости уровня доходов фирмы за 1999 и 1998 годы по месяцам в виде гистограммы;
5. Построить диаграмму роста уровня доходов фирмы.

Задание 2.

Итоги экзаменационной сессии

1. Посчитайте средний балл каждого студента по всем предметам и по всем студентам одного предмета.
2. Составить круговую диаграмму с отображением среднего балла по предметам.

№ п/п	Ф. И.О.	Математика	Экономика	Информатика	Средний балл
1.	Макаров С.П.	4	5	5	
2.	Иванов П.А.	5	5	5	
3.	Сидорова Н.Н.	3	3	3	
4.	Кушнарева Л.П.	3	4	5	
5.	Токарева Р.В.	5	4	4	
6.	Васильев К.Р.	4	3	4	
Средний балл					

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 27

Тема занятия: Решение задач «Решение комбинаторных задач» (2 часа)

Содержание темы: познакомиться с формулами комбинаторики и применение их при решении задач.

Планируемые образовательные результаты: повторить основные элементы комбинаторики; отрабатывать навыки решения задач по комбинаторике.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Порядок выполнения работы:

1. Познакомиться с теоретическим материалом.
2. Сделать краткий конспект теоретического материала в рабочих тетрадях (основные понятия, определения, формулы, примеры).
3. В тетрадях для практических работ выполнить самостоятельную работу и решить задания, которые указаны в работе.
4. Оформить отчет о работе.

Теоретические сведения:

Комбинаторика – это раздел математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов некоторого множества в соответствии с заданными правилами. Комбинаторика изучает комбинации и перестановки предметов, расположение элементов, обладающее заданными свойствами. Обычный вопрос в комбинаторных задачах: сколькими способами.

Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами великих французских математиков 17 века Блеза Паскаля (1623–1662) и Пьера Ферма (1601–1665) по теории азартных игр. Эти труды содержали принципы определения числа комбинаций элементов конечного множества. С 50-х годов 20 века интерес к комбинаторике возрождается в связи с бурным развитием кибернетики.

Основные правила комбинаторики – это правило суммы и правило произведения.

- *Правило суммы*

Если некоторый элемент А можно выбрать n способами, а элемент В можно выбрать m способами, то выбор «либо А, либо В» можно сделать $n + m$ способами.

Например, Если на тарелке лежат 5 яблок и 6 груш, то один плод можно выбрать $5 + 6 = 11$ способами.

- *Правило произведения*

Если элемент А можно выбрать n способами, а элемент В можно выбрать m способами, то пару А и В можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Например, если есть 2 разных конверта и 3 разные марки, то выбрать конверт и марку можно 6 способами ($2 \cdot 3 = 6$).

Правило произведения верно и в том случае, когда рассматривают элементы нескольких множеств.

Например, если есть 2 разных конверта, 3 разные марки и 4 разные открытки, то выбрать конверт, марку и открытку можно 24 способами ($2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$).

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называется n – факториалом и обозначается символом $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n.$$

Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Принято считать $0!$ равным 1.

Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется размещением из n элементов по k элементов:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Пример. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

Решение. Число способов равно числу размещений из 7 элементов по 4, т.е. равно A_7^4 .

Получаем $A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$.

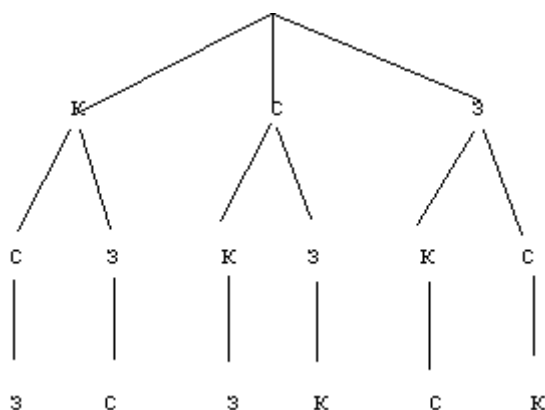
Размещения из n элементов по n элементов называются перестановками из n элементов:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Например, если есть 3 шарика – красный, синий и зелёный, то выложить их в ряд можно 6 способами ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$).

Иногда комбинаторная задача решается с помощью построения дерева возможных вариантов.

Например, решим предыдущую задачу о 3-х шарах построением дерева.



Пример. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

Решение. Цифра 5 обязана стоять на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Сочетания. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется сочетанием из n элементов по k элементов:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Пример: Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

Решение: Матчей состоится столько, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из 16 элементов, т.е. их число

равно
$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{14! \cdot 15 \cdot 16}{2! \cdot 14!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$$
.

Свойства сочетаний:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad C_{n+k}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$$

Ознакомьтесь с условиями задач, решите их.

1 вариант

1. В кафе предлагают два первых блюда: борщ, рассольник – и четыре вторых блюда: гуляш, котлеты, сосиски, пельмени. Укажите все обеды из двух блюд, которые может заказать посетитель. Проиллюстрируйте ответ, построив дерево возможных вариантов.
2. Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов может он выбрать?
3. Сколько различных трёхзначных чисел (без повторения цифр), можно составить из цифр 1,2,3,4,5, таких, а) которые являются чётными; б) в которых цифра 3 последняя.

2 вариант

1. Стадион имеет четыре входа: А, В, С и Д. Укажите все возможные способы, какими посетитель может войти через один вход, а выйти через другой. Сколько таких способов? Проиллюстрируйте ответ, построив дерево возможных вариантов.
2. Сколькими способами 5 человек могут встать в очередь в театральную кассу?
3. Сколько различных трёхзначных чисел (без повторения цифр), можно составить из цифр 0,2,3,5,6, таких, а) в которых цифра 5 первая; б) которые являются нечётными?

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 28

Тема занятия: Решение задач «Вероятность в профессиональных задачах» (4* часа)

Содержание темы: показать на конкретных примерах из жизни практическое применение вероятности событий.

Планируемые образовательные результаты: сформировать умения по определению вероятности события

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Теоретические сведения:

Понятие о случайном событии.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется **случайным**. В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют **достоверным**, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, - **невозможным**.

События называются **несовместными**, если каждый раз возможно появление только одного из них.

События называются **совместными**, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появления другого при том же испытании.

События называются **противоположными**, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, D, \dots$.

Классическое определение вероятности

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется **вероятностью** этого события и обозначается символом $P(A)$.

Определение. Вероятностью события A называется отношение числа исходов m ,

благоприятствующих наступлению данного события A , к числу n всех исходов т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Теорема сложения вероятностей

Вероятность наступления двух (или нескольких) несовместных событий равна сумме

вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$ или

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению

вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Понятие о случайном событии.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется **случайным**. В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют **достоверным**, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, - **невозможным**.

События называются **несовместными**, если каждый раз возможно появление только одного из них.

События называются **совместными**, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появления другого при том же испытании.

События называются **противоположными**, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, D, \dots$.

Классическое определение вероятности

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется **вероятностью** этого события и обозначается символом $P(A)$.

Определение. Вероятностью события A называется отношение числа исходов m ,

благоприятствующих наступлению данного события A , к числу n всех исходов т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Теорема сложения вероятностей

Вероятность наступления двух (или нескольких) несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$ или $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

Задача 1. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение. Общее число различных исходов есть $n=1000$. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет $m=200$. Согласно формуле, получим

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Задача 2. На заочное отделение техникума поступают контрольные работы по математике из городов A , B и C . Вероятность поступления контрольной работы из города A равна 0,6, из города B - 0,1. Найти вероятность того, что очередная контрольная работа поступит из города C .

Решение. События «контрольная работа поступила из города A », «контрольная работа поступила из города B » и «контрольная работа поступила из города C » образуют полную систему, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$0,6 + 0,1 + p = 1, \text{ т.е. } p = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Задача 3. В первой урне находится 6 черных и 4 белых шара, во второй - 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение. Пусть A_1 - из первой урны извлечен белый шар; A_2 - из второй урны извлечен белый шар. Очевидно, что события A_1 и A_2 независимы.

Так как $P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $P(A_2) = \frac{7}{12}$, то по формуле $P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ находим

$$P(A_1 A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$

Задания практической части:

1. При стрельбе по мишени вероятность сделать отличный выстрел равна 0,3, а вероятность выстрела на оценку «хорошо» равна 0,4. Какова вероятность получить за сделанный выстрел оценку не ниже «хорошо»?
2. Вероятность того, что лицо умрет на 71-м году жизни, равна 0,04. Какова вероятность того, что человек не умрет на 71-м году?
3. Бросается один раз игральная кость. Определить вероятность выпадения 3 или 5 очков.
4. В урне 30 шаров: 15 белых, 10 красных и 5 синих. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?
5. В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет?
6. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.
7. В колоде 36 карт. Наудачу вынимаются из колоды 2 карты. Определить вероятность того, что вторым вынут туз, если первым тоже вынут туз.

8. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.
9. Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут вынуты подряд два туза?
10. Два стрелка стреляют по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, вторым стрелком — 0,7. Найти вероятность поражения цели двумя пулями в одном залпе.
11. Найти вероятность одновременного появления герба при одном бросании двух монет.
12. Имеется два ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе вынутые детали окажутся стандартными.
13. В семье двое детей. Принимая события, состоящие в рождении мальчика и девочки равновероятными, найти вероятность того, что в семье: а) все девочки; б) дети одного пола..]
14. Пусть всхожесть семян оценивается вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что из двух посеянных семян взойдет какое-либо одно?
15. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 29

Тема занятия: Решение задач «Уравнения и неравенства с параметрами» (2* часа)

Содержание темы: расширить знания учащихся по способам и методам решения уравнений и неравенств с параметрами.

Планируемые образовательные результаты: углубление и расширение знаний учащихся о способах и методах решения уравнений и неравенств с параметрами.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка.

Задания для самостоятельного выполнения:

I. Теоретическая часть.

Определение:

Переменная или постоянная величина в уравнении, неравенстве, системе уравнений и др., которая не рассматривается как искомая, а наоборот, решения отыскиваются в зависимости от этой величины.

Постоянная величина, характеризующая некоторый математический объект.

Вспомогательная переменная величина, от которой зависят другие величины, определяющий математический объект.

Параметры встречаются при введении некоторых понятий:

- функция, прямая пропорциональность: $y = kx$, (x и y - переменные, k – параметр);
- линейная функция: $y = kx + b$, (x и y – переменные, k и b – параметры)
- уравнение первой степени: $ax + b = 0$, (x - переменная, a и b – параметры);
- квадратное уравнение; $ax^2 + bx + c = 0$, (x - переменная, a , b , c - параметры, $a \neq 0$).

II. Разбор примеров с решениями:

Пример 1. Решить уравнение $ax = 1$.

Решение.

Решить уравнение с параметром – значит, для всех допустимых значений параметра найти множество всех решений уравнения.

- 1) если $a \neq 0$, $x = 1/a$.
- 2) если $a = 0$, то данное уравнение решений не имеет.

Ответ: если $a = 0$, то нет решений;

если $a \neq 0$, то $x = 1/a$.

Пример 2. Решить уравнение: $(a^2 - 1)x = a + 1$.

Решение. Рассмотрим следующие случаи:

1. Если $a = 1$, то уравнение принимает вид $0x = 2$ и не имеет решений;
2. Если $a = -1$, то уравнение принимает вид $0x = 0$, и тогда x – любое действительное число;
3. Если $a \neq \pm 1$ и уравнение имеет единственное решение .

Важным этапом решения задач с параметрами является запись ответа. В решении уравнений с параметром составление ответа – это запись всех полученных результатов. И здесь очень важно не забыть отразить в ответе все этапы решения.

Ответ: если $a = -1$, то x – любое действительное число;
если $a = 1$, то уравнение не имеет решений; если $a \neq \pm 1$, то .

III. Самостоятельная работа

Решить уравнения:

- а) $(a^2 - 9)x = a + 3$;
- б) $(a^2 - 3a + 2)x = a - 1$.

IV. Сделать вывод

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 30

Тема занятия: Решение уравнений и неравенств (2 часа)

Содержание темы: обобщить и систематизировать знания по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства», «Логарифмические уравнения и неравенства», «Показательные уравнения и неравенства», «Системы уравнений и неравенств»; закрепить умения использовать полученные знания для решения задач в том числе с применением компьютерной техники.

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

Задание 1. Решите уравнения.

$$\begin{array}{lll}
1. \operatorname{ctg} x = \sqrt{3}. & 2. \sin 2x = -\frac{1}{2}. & 3. \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\
4. 2\sin^2 x + \sin x = 0. & 5. \sqrt{3}\operatorname{ctg} x - 2\cos x = 0. & \\
6. 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0. & 7. 2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x. &
\end{array}$$

Задание 2. Решите уравнения.

$$\begin{array}{lll}
1. \left(\frac{1}{7}\right)^{2+x} = 49. & 2. \left(\frac{1}{4}\right)^{5+x} = 16. & 3. 4^x = 2\sqrt{2}. \\
4. 3^{x+2} - 3^x = 216. & 5. 4^{x+1} - 2^{2x-3} = 62. & \\
6. \log_7(x-4) = 3. & 7. \log_8(-1+x) = 1. & \\
8. \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7. & 9. \log_{125} x - 2\log_{25} x + 3\log_5 x = 7. &
\end{array}$$

Задание 3. Решите неравенство методом интервалов.

$$1. \frac{2}{x-3} \geq 1. \quad 2. \frac{3}{2x-1} < -1.$$

Задание 4. Решите неравенства.

$$\begin{array}{lll}
1. 9^x \geq \sqrt{27}. & 2. (\sqrt{2})^{3-5x} < 64. & 3. \log_3 x < 1. \\
4. \log_5(x^2 - 2x - 3) \leq 1. & 5. \log_{1/4}\left(\frac{x-3}{x+3}\right) \geq -\frac{1}{2}. &
\end{array}$$

Задание 5. Решите системы неравенств.

$$1. \begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0; \\ 2 - x \geq \frac{8-9x}{7}. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0; \\ 3x - 5 \leq \frac{4x+5}{3}. \end{cases}$$

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие № 31

Тема занятия: Решение задач с помощью уравнений (4 часа)

Содержание темы: обобщить и систематизировать знания по теме «Решение уравнений», закрепить умения использовать полученные знания для решения задач.

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированные данные по теме.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Рассмотреть примеры решения задач на работу и производительность труда.

Пример №1. Заказ по выпуску машин завод должен был выполнить за 20 дней. Но завод выпускал ежедневно по 2 машины сверх плана, а поэтому выполнил заказ за 18 дней. Сколько машин выпустил завод?

Решение. Пусть завод должен был выпускать x машин в день, тогда заказ составляет $20x$ машин.

На самом деле завод выпускал $(x + 2)$ машины в день и за 18 дней выпустил $18(x + 2)$ машин.

По условию задачи

$$20x = 18(x + 2),$$

откуда $x = 18$. Таким образом, завод выпустил 360 машин.

Ответ: 360.

Пример № 2. Для прокладки траншеи выделено два экскаватора разных типов. Время, необходимое первому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи, на 3 часа меньше времени, необходимого второму экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи.

Сумма этих времен в $4\frac{4}{35}$ раза больше времени, необходимого для прокладки траншеи при совместной работе двух экскаваторов. Определить, сколько времени необходимо каждому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи.

Решение: Примем длину траншеи за 1, производительность (т.е. количество проложенных за 1 час метров траншеи) первого экскаватора обозначим через x , а второго через y . Тогда приходим к системе уравнений:

Условия задачи	Уравнения
Время, необходимое первому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи, на 3 часа меньше времени, необходимого второму экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи	$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 3.$
Сумма этих времен в $4\frac{4}{35}$ раза больше времени, необходимого для прокладки траншеи при совместной работе двух экскаваторов	$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{144}{35} \frac{1}{x+y}$

$$\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 3, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{144}{35} \frac{1}{x+y}. \end{cases}$$

$$\frac{x}{y}.$$

Обозначим через t отношение $\frac{x}{y}$. Тогда, как видно из первого уравнения, $x > y$, т.е. $t > 1$, следовательно, из второго уравнения получаем:

$$t + 1 = \frac{144}{35} \frac{t}{t+1} \Rightarrow t = \frac{7}{5} \Rightarrow x = \frac{7}{5} y.$$

Подставляя теперь это соотношение в первое уравнение системы, после простейших преобразований находим

$$\frac{1}{x} = 7,5 \quad \frac{1}{y} = 10,5$$

часов, а часов.

Ответ: 7 ч 30 мин; 10 ч 30 мин.

Пример № 3. Токарь и его ученик получили наряд на изготовление деталей. По нему ученик должен изготовить 35 деталей, а токарь 90 деталей. Токарь и ученик начали работу одновременно. Сначала токарь сделал 30 деталей, обрабатывая в час вдвое больше ученика. Затем он перешел на максимальную скорость обработки и стал обрабатывать в час ещё на 2 детали больше и закончил свою работу на 1 час позже ученика. Если бы токарь и первые 30 деталей обрабатывал с максимальной скоростью, то закончил бы работу на 30 мин позже ученика. Сколько деталей в час обрабатывал ученик?

Решение: Пусть (д/ч) – производительность ученика;

2 (д/ч) – первоначальная производительность токаря;

(2+2) (д/ч) – максимальная производительность токаря.

Согласно условию задачи имеем:

Условия задачи	Уравнения
Токарь и ученик начали работу одновременно. Сначала токарь сделал 30 деталей, обрабатывая в час вдвое больше ученика. Затем он перешел на максимальную скорость обработки и стал обрабатывать в час ещё на 2 детали больше и закончил свою работу на 1 час позже ученика	$\frac{35}{x} = \frac{30}{2x} + \frac{60}{2x+2} - 1$
Если бы токарь и первые 30 деталей обрабатывал с максимальной скоростью, то закончил бы работу на 30 мин. позже ученика	$\frac{35}{x} = \frac{90}{2x+2} - \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{35}{x} = \frac{30}{2x} + \frac{60}{2x+2} - 1, \\ \frac{35}{x} = \frac{90}{2x+2} - \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10x-20}{x^2+x} = 1, \\ \frac{10x-35}{x^2+x} = \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 20 = 0, \\ x^2 - 19x + 70 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x = 4, \\ x = 5, \\ x = 14, \end{cases} \quad \text{откуда } x = 5. \end{aligned}$$

Ответ: ученик обрабатывал в час 5 деталей.

2. Решить задачи самостоятельно.

Задание 1. Фермеры должны были закончить сев за 5 дней. Но, узнав о предстоящем ухудшении погоды, они засевали в день на 20 га больше, чем предполагалось по плану, и поэтому закончили сев за 4 дня. Сколько гектаров они засеяли?

Задание 2. На обработку одной детали один рабочий затрачивает на 1 мин меньше, чем другой. Сколько деталей обработает первый рабочий за 4 ч, если он обрабатывает за это время на 8 деталей больше, чем второй?

Задание 3. Бригада цветоводов должна была высадить в понедельник на центральных площадях города 7200 цветов. Однако три человека заболели, и каждому из вышедших на работу пришлось высадить на 400 цветов больше нормы, чтобы успеть вовремя. Сколько человек вышло на работу в понедельник?

Задание 4. Первая машинистка напечатала 270 страниц, печатая в день на 2 страницы больше второй машинистки, при этом работала она на 1 день меньше, чем вторая. Сколько страниц в день печатала вторая машинистка, если всего она напечатала 280 страниц?

Задание 5. Два секретаря должны были сделать по 120 звонков клиентам фирмы к определенному сроку. Один из них выполнил работу на 5 ч раньше второго, так как делал на 2 звонка в час больше второго. Сколько клиентам дозвонились во второй час работы оба секретаря?

Задание 6. Два помощника депутата так разделили между собой работу по редактированию доклада, что закончили каждый свою часть работы одновременно, через 12 ч. Первый помощник, работая один, мог бы отредактировать доклад на 10 ч быстрее второго. Сколько часов потребовалось бы второму помощнику для выполнения этой работы?

Задание 7. Каждый из секретарей должен был подготовить к отправке по 36 одинаковых писем. Первый секретарь приступил к работе на

4 мин позже второго, но — задания они закончили выполнять одновременно. Полностью выполнив свое задание и, затратив 2 мин на получение указаний руководителя, первый секретарь вновь приступил к работе и к моменту выполнения задания вторым секретарем отправил еще 2 таких письма. Сколько писем в час отправлял второй секретарь?

Задание 8. Два насоса разной мощности, работая одновременно, наполняли бассейн водой за 4 ч. После реконструкции производительность первого насоса увеличилась на 20%, а второго — на 60%. Теперь они, работая одновременно, наполняют бассейн за 3 ч. За сколько часов может наполнить бассейн первый насос после реконструкции?

Задание 9. Два транспортера в аэропорту, работая одновременно, доставляли багаж пассажирам за 40 мин. После реконструкции скорость доставки груза первым транспортером увеличилась в 2 раза, а вторым — в 1,5 раза. Теперь они доставляют багаж за 24 мин, если работают одновременно. Сколько часов занимала доставка багажа первым транспортером до реконструкции, если второй находился в ремонте?

Задание 10. Для наполнения газгольдера сжатым газом имеются три компрессора. Второму компрессору для наполнения газгольдера требуется времени вдвое меньше, чем первому, и на 4 ч меньше, чем третьему. Три компрессора, работая вместе, наполнили бы газгольдер за 2 ч, но по технологическим требованиям одновременно должны работать только два из них. Определите минимальное время (в минутах) наполнения газгольдера.

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.

Практическое занятие №32

Тема занятия: Решение задач с помощью уравнений (4* часа)

Содержание темы: обобщить и систематизировать знания по математике, закрепить умения использовать полученные знания для решения задач.

Планируемые образовательные результаты: обобщены и систематизированы данные по теме.

Формы организации учебной деятельности: практическая работа.

Материально-техническое оснащение: тетрадь, ручка, карандаш, линейка

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Теоретический материал (Задачи на движение)

Обычно в задачах на движение, если не оговорено дополнительно, используются следующие допущения: движение на отдельных участках считается равномерным, повороты считаются мгновенными, т. е. без затрат времени, скорость при этом меняется мгновенно.

В качестве переменных принимаются величины S – путь или расстояние, V – скорость, t – время.

При решении задач на движение полезно сразу переводить все данные в одни и те же единицы измерения.

Пример 1. На путь между двумя деревьями пешеход затратил на 4 ч 30 мин больше, чем мотоциклист. Скорость мотоциклиста 40 км/ч, скорость пешехода составляет $1/10$ скорости мотоциклиста. Найдите расстояние между деревьями.

Решение. Во-первых, найдем скорость пешехода. Она равна 4 км/ч.

Пусть мотоциклист может проехать расстояние между деревьями за x ч, тогда пешеход может пройти это расстояние за $(x + 4,5)$ ч. Таким образом, пешеход пройдет $4(x + 4,5)$ км, мотоциклист проедет $40x$ км.

Так как по условию задачи эти величины равны, получим уравнение

$$4(x + 4,5) = 40x, \text{ откуда } x = 0,5.$$

Следовательно, расстояние между деревьями равно $0,5 * 40 = 20$ (км).

Ответ: 20.

В следующих задачах *запланированные* параметры движения (расстояние, время и скорость) сопоставляются с *реальными*.

Для решения подобных задач необходимо выразить через переменную расстояние, время и скорость на каждом из запланированных и реальных участков пути с момента отклонения от плана. После этого нужно найти в условии задачи еще не использованный факт и с его помощью составить уравнение.

Пример 2. Велосипедист должен был проехать весь путь с определенной скоростью за 2 ч. Но он ехал со скоростью, превышающей намеченную на 3 км/ч, и поэтому на весь путь затратил $5/3$ ч. Найдите длину пути.

Решение. При решении этой задачи полезно рассматривать как бы два участка пути — запланированный и реальный. Они, естественно, равны по длине, но отличаются временем и скоростью их прохождения.

По плану: затраченное время 2 ч, скорость обозначим x км/ч, расстояние равно $2x$ км.

В реальности: скорость $(x + 3)$ км/ч, время $5/3$ ч, значит, расстояние равно $5/3(x + 3)$ км.

Поскольку в реальности пройдено именно то расстояние, которое и было запланировано, получаем уравнение $2x = 5/3(x + 3)$, откуда $x = 15$.

Итак, велосипедист должен был за 2 ч со скоростью 15 км/ч проехать расстояние $2 \cdot 15 = 30$ км. Ответ 30.

Пример 3. Автобус прошел $5/6$ пути со скоростью 50 км/ч, а затем задержался на 3 мин. Чтобы прибыть в конечный пункт вовремя, оставшуюся часть пути он шел со скоростью 60 км/ч. Найдите путь, пройденный автобусом.

Решение. Отклонение от плана началось с момента остановки. Обозначим за x ч — время, за которое автобус должен был пройти оставшуюся $1/6$ часть пути. Тогда запланированное расстояние равно $50x$ км.

В реальности $1/20$ ч автобус стоял, а оставшуюся часть пути прошел за $(x - 1/20)$ ч, то есть реально пройденный путь равен $60(x - 1/20)$ км.

По условию задачи запланированное расстояние совпадает с реально пройденным, следовательно, получаем уравнение $60(x - 1/20) = 50x$, откуда $x = 0,3$. Таким образом, $1/6$ часть пути равна $50 \cdot 0,3 = 15$ (км), а весь путь равен $15 \cdot 6 = 90$ (км). О т в е т: 90.

Рассмотрим задачи, описывающие движение двух участников. В задачах на *совместное движение* участники не всегда одновременно начинают движение и не всегда одновременно его заканчивают. Поэтому очень важно выделить участок или участки пути, на которых движение происходит действительно совместно. Кроме этого, в задачах имеются, как правило, такие участки пути, на которых передвигается один участник, в то время как другой еще не начал или уже закончил движение.

В некоторых задачах полезно найти *скорость сближения* (или *удаления*) участников — величину, показывающую, на сколько уменьшается (или увеличивается) расстояние между участниками движения в единицу времени.

Замечания.

Скорость сближения или удаления равна *сумме скоростей* участников при их движении в *противоположных направлениях* (навстречу друг другу или друг от друга).

При движении участников в *одном направлении* (один убегает, другой его догоняет) скорость сближения или удаления равна *модулю разности их скоростей*.

Пример 4. Из Смоленска в Москву вышел поезд со скоростью 70 км/ч. Спустя 1 ч 40 мин из Москвы в Смоленск отправился поезд, скорость которого равна 60 км/ч. Через сколько часов после выхода поезда из Смоленска произойдет встреча, если расстояние между городами равно 420 км?

Решение. Совместное движение началось в момент выхода из Москвы первого поезда. К этому времени второй поезд прошел $70 \cdot 5/3 = 350/3$ (км) и расстояние между поездами сократилось до

$$420 - 350/3 = 910/3 \text{ (км)}.$$

Закончилось совместное движение их встречей.

Итак, на расстоянии $910/3$ (км) поезда сближались со скоростью $70 + 60 = 130$ (км/ч) и потратили на это

$$910/3:130=7/3 \text{ (ч)}$$

Тогда поезд из Смоленска шел до встречи $5/3 + 7/3 = 12/3 = 4$ (ч).

О т в е т: 4.

В ряде задач на движение учитываются скорость ветра при движении самолетов, скорость течения при движении по реке. В задачах такого типа рассматриваются две основные скорости - *собственная скорость* самолета, корабля, лодки, создаваемая двигателем или усилием людей при работе на веслах, т.е. скорость движения при отсутствии ветра или в стоячей воде, и *скорость ветра или течения*. Как правило, если собственная скорость и скорость ветра (или течения) не даны, то именно их обозначают переменными. Две другие скорости — *скорость по ветру* или течению и *скорость против* ветра или течения — можно выразить через основные скорости (через их сумму или разность). Далее решаем задачу, как любую другую задачу на движение.

Пример 6. Самолет пролетит по направлению ветра за 5,5 ч такое же расстояние, какое в обратном направлении за 6 ч при условии, что ни скорость, ни направление ветра не меняются. Найдите расстояние, которое пролетит самолет туда и обратно, если собственная скорость самолета равна 690 км/ч.

Решение. В данной задаче основные скорости — собственная скорость самолета, равная 690 км/ч, и скорость ветра, которая не дана. Обозначим ее за x км/ч.

Тогда при движении по направлению ветра самолет со скоростью $(690 + x)$ км/ч за 5,5 ч пролетит $5,5(690 + x)$ км, а при движении против направления ветра самолет со скоростью $(690 - x)$ км/ч за 6 ч пролетит $6(690 - x)$ км.

Учитывая, что по условию задачи самолет туда и обратно пролетает одно и то же расстояние, составим уравнение

$$5,5 \cdot (690 + x) = 6 \cdot (690 - x).$$

Решая уравнение, находим, что скорость ветра равна 30 км/ч. Далее вычислим расстояние: $6 \cdot (690 - 30) = 3960$ (км).

Туда и обратно самолет пролетит $3960 \cdot 2 = 7920$ (км).

Ответ: 7920

Пример №7 Из города выехал грузовик со скоростью 60 км/ч. Через 2 часа вдогонку выехал мотоциклист. В некоторый момент времени расстояние между ними было 80 км. Если бы скорость мотоциклиста была в $5/4$ раза больше, чем в действительности, то это расстояние оказалось бы в три раза меньше. Найти скорость мотоциклиста.

Решение: Пусть скорость мотоциклиста v км/ч, а t — время до момента, когда расстояние между ними впервые стало равно 80 км. Тогда за время t ч грузовик прошел расстояние $60t$ км, а мотоциклист за время $t - 2$ проехал $v(t - 2)$ км. Откуда получаем уравнение

$$60t - v(t - 2) = 80$$

Аналогично из второго условия вытекает второе уравнение

$$60t - \frac{5}{4}v(t - 2) = \frac{80}{3}$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 60t - v(t - 2) = 80, \\ 60t - \frac{5}{4}v(t - 2) = \frac{80}{3}. \end{cases}$$

Вычитая теперь из первого уравнения второе и умножая затем обе части полученного уравнения на 4, приходим к соотношению

$$v(t - 2) = 640/3.$$

Теперь из первого уравнения следует $t = 44/9$, следовательно,

$$v = 960/13 = 73\frac{11}{13} \text{ км/ч.}$$

Ответ: $73\frac{11}{13}$ км/ч.

Пример №8 Два самолета вылетели одновременно из пунктов А и В навстречу друг другу и встретились на расстоянии 100 км от середины АВ. Если бы первый самолет вылетел на 20 минут позже второго, то они встретились бы на четверти пути от А, а если бы второй самолет вылетел на 20 минут позже первого, то они встретились бы на полпути. Определить скорости самолетов.

Решение:

Пусть скорости первого и второго самолетов равны соответственно V_1 и V_2 км/ч, а расстояние между А и В – S км.

Для составления системы уравнений составим таблицу:

Условия задачи	Уравнения
Если бы первый самолет вылетел на 20 минут позже второго, то они встретились бы на четверти пути от А.	$\frac{3S}{4V_2} - \frac{S}{4V_1} = \frac{1}{3}.$
Если бы второй самолет вылетел на 20 минут позже первого, то они встретились бы на полпути.	$\frac{S}{2V_1} - \frac{S}{2V_2} = \frac{1}{3}.$

Заметим, что как видно из второго уравнения $V_2 > V_1$ т.е. первое условие задачи позволяет заключить:

Самолеты встретились на расстоянии 100 км от середины АВ.	$\frac{\frac{S}{2} + 100}{V_2} = \frac{\frac{S}{2} - 100}{V_1}$
---	---

Таким образом, приходим к системе уравнений

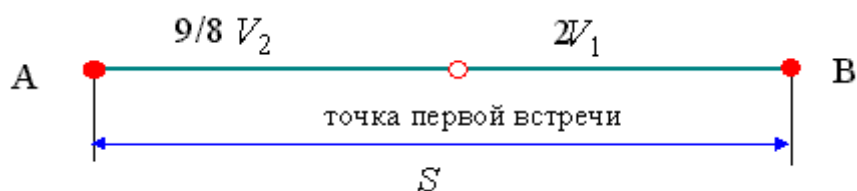
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3S}{4V_2} - \frac{S}{4V_1} = \frac{1}{3}, \\ \frac{S}{2V_1} - \frac{S}{2V_2} = \frac{1}{3}, \\ \frac{\frac{S}{2} + 100}{V_2} = \frac{\frac{S}{2} - 100}{V_1}. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3S}{V_2} - \frac{S}{V_1} = \frac{4}{3}, \\ \frac{S}{V_1} - \frac{S}{V_2} = \frac{2}{3}, \\ \frac{S}{V_1} - \frac{S}{V_2} = 200 \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right). \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{V_2} = 1, \\ \frac{S}{V_1} = \frac{5}{3}, \\ \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} = \frac{1}{3}. \end{array} \right.$$

Откуда $S = 800$ км, $V_2 = 800$ км/ч, $V_1 = 480$ км/ч.

Пример №9 Грузовой и легковой автомобили выехали одновременно навстречу друг другу соответственно из пунктов А и В. После встречи грузовой автомобиль прибывает в В через два часа, а легковой в А через $9/8$ часа. Каждый едет с постоянной скоростью без остановки и, приехав в конечный пункт, тут же поворачивает обратно, и на обратном пути встречаются в 60 км от В. Найти время затраченное каждым автомобилем на поездку туда и обратно.

Решение: Пусть скорость грузового автомобиля V_1 км/ч, скорость легкового автомобиля V_2 км/ч, а расстояние от А до В равно S км.

Тогда имеем:
 первая встреча грузовика и легкового автомобиля



Следовательно, получаем первые два уравнения:

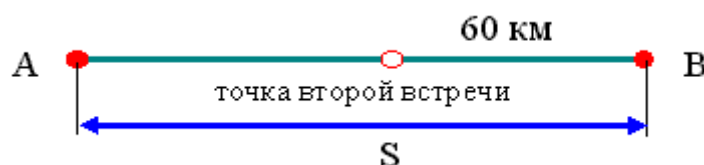
Условия задачи	Уравнения
После встречи грузовой автомобиль прибывает в В через 2 ч, легковой автомобиль в А через 9/8 ч.	$\frac{9/8 V_2}{V_1} = \frac{2V_1}{V_2},$ $\frac{9}{8} V_2 + 2V_1 = S.$

Для получения второго уравнения рассмотрим второе условие:
 вторая встреча грузовика и легкового автомобиля

Приехав в конечный пункт, они тут же поворачивают обратно, и на обратном пути

$$\frac{S + 60}{V_1} = \frac{2S - 60}{V_2}.$$

встречаются в 60 км.



Итак, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{9/8 V_2}{V_1} = \frac{2V_1}{V_2}, \\ \frac{9}{8} V_2 + 2V_1 = S, \\ \frac{S + 60}{V_1} = \frac{2S - 60}{V_2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4}, \\ \frac{21}{8} V_2 = S, \\ \frac{S + 60}{2S - 60} = \frac{3}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 210, \\ \frac{S}{V_2} = \frac{21}{8}, \\ \frac{S}{V_1} = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

$$\frac{2S}{V_1} = 7 \text{ и } \frac{2S}{V_2} = \frac{21}{4}.$$

По условию задачи нам необходимо найти величины:

Однако удастся определить и остальные переменные $V_1 = 60, V_2 = 80$

$$\frac{2S}{V_1} = 7 \text{ и } \frac{2S}{V_2} = \frac{21}{4}.$$

Ответ:

2. Задания для самостоятельной работы.

Задание 1. Почтальон проехал на мотоцикле от почты до села со скоростью 30 км/ч. Назад он возвращался пешком со скоростью, составляющей 1/5 скорости его движения на мотоцикле, поэтому на обратный путь он затратил на 1 ч 12 мин больше, чем от почты до села. Найдите расстояние от почты до села.

Задание 2. Расстояние между деревней и поселком мотоциклист проезжает на 0,4 ч быстрее велосипедиста. Скорость мотоциклиста 18 км/ч, а скорость велосипедиста составляет 8/9 скорости мотоциклиста. Найдите расстояние между деревней и поселком.

Задание 3. Велосипедист каждую минуту проезжает на 800 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 30 км он затратил времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Сколько километров в час проезжал мотоциклист?

Задание 4. Путь от А до В пешеход проходит за 2 ч. Если он увеличит скорость на 2 км/ч, то уже за 1,8 ч он пройдет на 3 км больше, чем расстояние от А до В. Найдите расстояние от А до В.

Задание 5. Расстояние между двумя пунктами поезд проходит по расписанию с намеченной скоростью за 6 ч. Через 5 ч после отправления он был задержан в пути на 12 мин. Поэтому, чтобы прибыть на станцию назначения вовремя, поезд увеличил скорость на 15 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

Задание 6. Расстояние между двумя пунктами автомобиль должен был проехать за 4 ч. Первые 2 ч он ехал с намеченной скоростью, а затем снизил ее на 10 км/ч, поэтому в конечный пункт приехал на 20 мин позже, чем предполагал. Найдите первоначальную скорость автомобиля.

Задание 7. Расстояние между двумя пунктами автомобиль должен был пройти за 3 ч. Первые 2 ч он ехал с намеченной скоростью, а затем увеличил ее на 10 км/ч, поэтому в конечный пункт приехал на 12 мин раньше, чем предполагал. Найдите расстояние между этими пунктами.

Задание 8. Из Москвы в Киев вышел поезд со скоростью 80 км/ч. Спустя 24 мин из Киева в Москву отправился поезд со скоростью 70 км/ч. Через сколько часов после выхода из Москвы произойдет встреча, если расстояние между городами равно 872 км?

Задание 9. Из города А в город В выехал грузовик со скоростью 45 км/ч. После того как грузовик проехал 15 км, из города А выехал со скоростью 60 км/ч автомобиль, который приехал в город В на $\frac{1}{6}$ ч раньше грузовика. Найдите расстояние между городами.

Задание 10. Расстояние между городами А и В равно 50 км. Из города А в город В выехал велосипедист, а через 1 ч 30 мин вслед за ним выехал мотоциклист. Обогнав велосипедиста, он прибыл в город В на 1 ч раньше его. Найдите скорость мотоциклиста, если известно, что она в 2,5 раза больше скорости велосипедиста.

Задание 11. Из двух пунктов А и В, расстояние между которыми равно 5 км, одновременно в одном направлении выехали велосипедист и легковой автомобиль. Легковой автомобиль все время был впереди велосипедиста, и через $\frac{2}{3}$ ч. расстояние между ними стало 35 км. Найдите скорость велосипедиста, если она в 4 раза меньше скорости легкового автомобиля.

Задание 12. Из двух аэропортов, расстояние между которыми равно 1300 км, вылетели одновременно навстречу друг другу два самолета — один с поршневым, другой с реактивным двигателем. Через 30 мин им оставалось пролететь до встречи 800 км. Найдите скорость самолета с реактивным двигателем, если она в 3 раза больше скорости самолета с поршневым двигателем.

Задание 13. Два туриста отправились одновременно из пунктов А и В, расстояние между которыми равно 33 км, навстречу друг другу. Через 3 ч 12 мин расстояние между ними сократилось до 1 км (они еще не встретились), а еще через 2 ч 18 мин первому осталось пройти до пункта В втрое большее расстояние, чем второму до пункта А. Найдите скорость второго туриста.

Задание 14. Лодка проплывет за 3 ч по течению такое же расстояние, какое за 4 ч против течения. Найдите расстояние, которое проплывет лодка вниз по течению, если собственная скорость лодки 14 км/ч.

Задание 15. Из пункта А вниз по течению реки движется лодка с собственной скоростью 17 км/ч. Ей навстречу из пункта В движется катер с собственной скоростью 26 км/ч. Лодка до встречи шла 2 ч, катер — 1,5 ч. Какое расстояние проплывет за 3 ч плот, если расстояние между пунктами А и В равно 74 км?

Задание 16. Катер, собственная скорость которого равна 21 км/ч, прошел вниз по реке от города А до города В 72 км и вернулся обратно. За это же время пустая канистра, упавшая с борта катера при отходе из города А, проплыла 21 км. Сколько времени понадобится канистре, чтобы доплыть от города А до города В?

Задание 17. Самоходная баржа, собственная скорость которой равна 20 км/ч, прошла по реке от одной пристани до другой 96 км и вернулась обратно. За это же время плот проплывет 40 км. Найдите время движения лодки вверх по реке.

Задание 18. Друзья отправились на пикник на лодке, а вечером вернулись обратно. Они проплыли в общей сложности 48 км, затратив на это 2 ч 48 мин. При этом на каждые 3 км против течения им приходилось тратить столько же времени, сколько на 4 км по течению. Найдите собственную скорость лодки.

Представление результатов практического задания: Отчет по практическому занятию следует оформить в виде вычислительных работ в тетради.